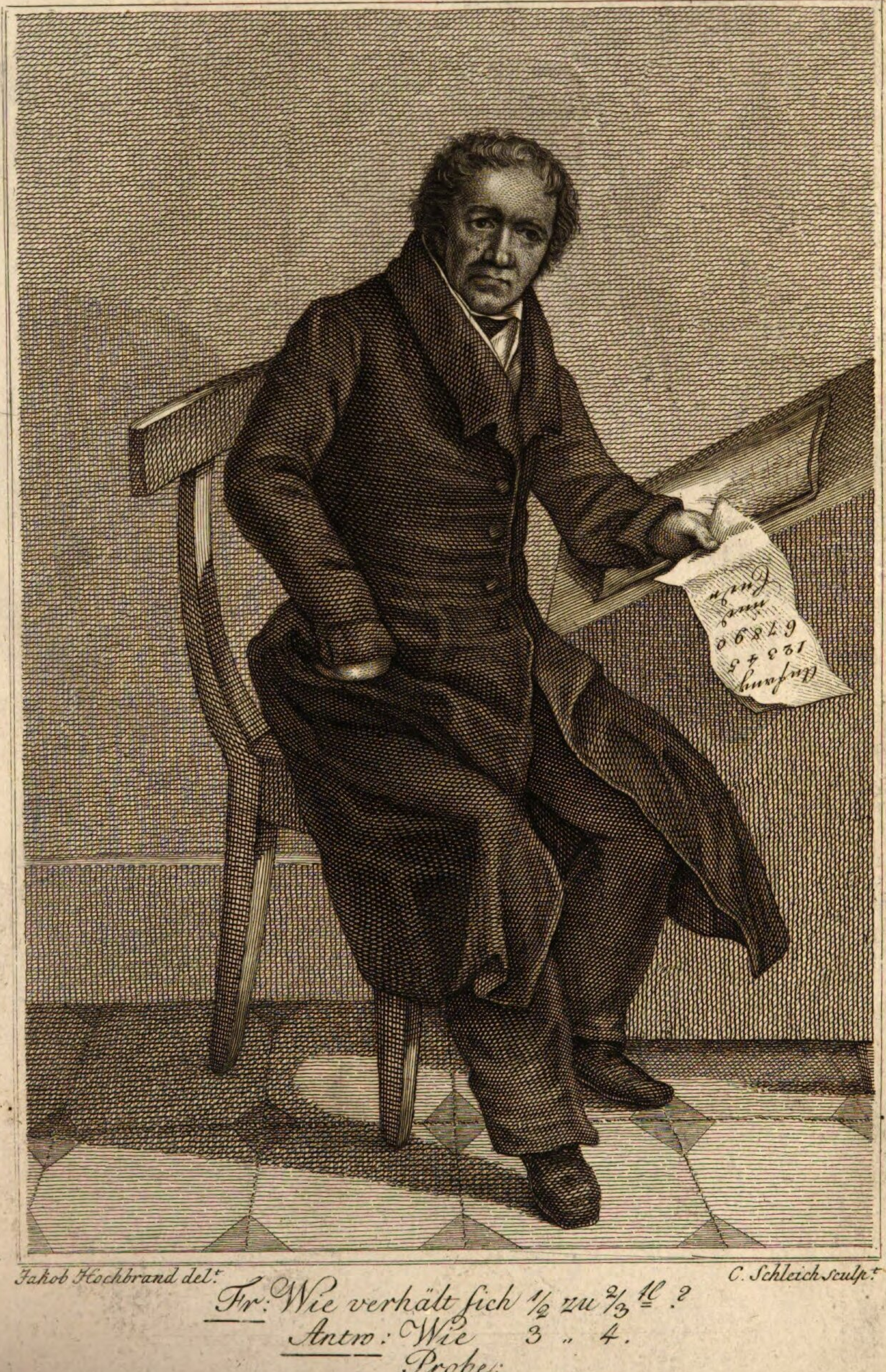
Math. P.
223 i

Hochbrand

18969/128

18969/128

Dem fragenden Rechner wird Antwort ertheilt, wie folgt:



Jakob Hochbrand del.t C. Schleich sculp.t

Fr: Wie verhält ſich $1/2$ zu $2/3$ fl. ?

Antw: Wie 3 „ 4.

Probe:

$1/2$ fl. ist gleich 30. Xr.

$2/3$ „ 40. Xr.

Handbuch

über

den fragenden Rechner,

welchem jedesmal eine belehrende Antwort, und nöthigen Falls auch die geeignete Erläuterung zum Selbst-Unterrichte gegeben worden ist.

Oder:

Arithmetisches Rechenbuch

für

alle Stände des bürgerlichen Lebens.

Verfaßt, und herausgegeben

von

Philipp Jakob Hochbrand,

königl. bayer. quiesc. Rechnungs-Revisor.

Augsburg, 1829.

Gedruckt bey Abraham Geiger.

Bayerische Staatsbibliothek München
MONACENSIS.

Rechnen! — und seiner Sache nicht gewiß seyn,
Heißt — nicht gerechnet.

Seiner Excellenz

dem

königlich bayerischen Staatsrathe im außerordentlichen Dienste, General = Kommissär und Regierungs = Präsidenten des Unter= Donau = Kreises; — dann Großkreutz des Civilverdienst = Ordens der bayerischen Krone

Herrn Freyherrn

Ferdinand von Schleich

Hochgeboren ꝛc.

widmet

dieses Handbuch

in tiefster Ehrfurcht

der

Verfasser.

Privilegium.

Wir Ludwig,

von Gottes Gnaden, König von Bayern,

ꝛc. ꝛc.

Nachdem Uns der [illegible] Rechnungs-Revisor [illegible] Ja-cob [illegible] zu [illegible] um Ertheilung eines förmlichen Privilegiums gegen den Nachdruck des von ihm herauszugebenden Werkes unter dem Titel: „Handbuch über das [illegible] allerunterthänigst gebeten, so finden Wir Uns bewogen, demselben das nachgesuchte Privilegium auf den Zeitraum von fünf Jahren, vom Tage gegenwärtiger Ausfertigung anfangend, hiedurch in der Art allergnädigst zu ertheilen, daß der Nachdruck im Inlande und der Handel mit etwa auswärts veranstalteten Nachdrücken, sowohl der gegenwärtigen Ausgabe des erwähnten Handbuches über den [illegible] als künftiger, als einzelner Theile desselben, in Unserem Königreiche bei Vermeidung einer Strafe von Einhundert Dukaten, wovon die eine Hälfte Unserem Aerar, die andere Hälfte dem genannten Verfasser, oder dem von ihm aufzustellenden Verleger zufallen soll, verboten, jedoch Unseren [illegible] nicht untersagt seyn [illegible] Rechnungs-Handbücher herauszugeben.

Wir wollen hiernach sämmtliche Obrigkeiten Unseres Königreiches [illegible], oder den rechtmäßigen Verleger des [illegible] Werkes gegen alle Beeinträchtigungen kräftigst

Privilegium.

Wir Ludwig,

von Gottes Gnaden, König von Bayern,

ꝛc. ꝛc.

Nachdem Uns der quiescirte Rechnungs-Revisor Phil. Jakob Hochbrand zu Landsberg um Verleihung eines förmlichen Privilegium's gegen den Nachdruck des von ihm herauszugebenden Werkes unter dem Titel: „Handbuch über den fragenden Rechner" allerunterthänigst gebeten, so finden Wir Uns bewogen, demselben das nachgesuchte Privilegium auf den Zeitraum von fünf Jahren, vom Tage gegenwärtiger Ausfertigung anfangend, hierdurch in der Art allergnädigst zu ertheilen, daß der Nachdruck im Inlande und der Handel mit etwa auswärts veranstalteten Nachdrücken, sowohl der vollständigen Ausgabe des erwähnten Handbuches über den fragenden Rechner, als einzelner Theile desselben, in Unserem Königreiche bey Vermeidung einer Strafe von Einhundert Dukaten, wovon die eine Hälfte Unserem Aerar, die andere Hälfte dem genannten Verfasser, oder dem von ihm aufzustellenden Verleger zufallen soll, verboten, jedoch Anderen darum nicht untersagt seyn soll, ebenfalls Rechnungs-Handbücher herauszugeben.

Wir weisen hiernach sämmtliche Obrigkeiten Unseres Königreiches an, den privilegirten Verfasser, oder den rechtmäßigen Verleger des bezeichneten Werkes gegen alle Beeinträchtigungen kräftigst

zu schützen, die ihnen angezeigten Nachdrücke sogleich wegnehmen, und demselben zur freyen Disposition zustellen zu lassen.

Gegeben in Unserer Haupt- und Residenzstadt München am zehenten März im Jahre eintausend achthundert acht und zwanzig.

Ludwig.

(L. S.)

Gr. v. Armansperg.

Auf Königlichen Allerhöchsten Befehl:

der General-Sekretär:

F. v. Kobell.

Vorerinnerung.

Bey dem so großen Vorrathe von Rechenbüchern möchte wohl die Erscheinung eines neuen Werkes von der Art überflüßig vorkommen, und ich würde diese Meinung recht gerne mit Jedem theilen, wenn ich nicht durch eigene Erfahrung mir die volle Ueberzeugung verschafft hätte, daß es im Fache der Rechenkunst noch Vortheile giebt, die lange nicht alle bekannt gemacht worden sind.

Die Wesentlichsten hievon, die ich bey Bearbeitung dieses Handbuches zur Grundlage nahm, bestehen vorzugsweise darin: daß ich

1tens bey der Addition den Vortheil an die Hand zu geben suchte, wie man solche ohne den bisherigen Gebrauch der zwey Worte und und ist, jedoch ohne die geringste Anstrengung, verrichten könne.

2tens Suchte ich die Kopfrechnung mit der Schriftrechnung, hinsichtlich dessen zu vereinigen, weil ich die verkürzte Division hiezu wählte, und von der bis zur Stunde beybehaltenen sehr umständlichen Divisionsart darin abgewichen bin: daß der Divisor, der Quotient, und allenfalls verbleibende Rest, jeder für sich allein zu bestehen hat.

Dieser Rechnungsart fügte ich auch eine Divisions-Erleichterungs-Tabelle bey, deren Anwendung nicht ohne guten Erfolg seyn dürfte.

3tens Nach den vier Spezies in unbenamten Zahlen habe ich a. die benamten, b. = gebrochenen, und c. = gemischten } Zahlen von jeder dieser vier Rechnungsarten, nach meiner eigenen Idee, nicht nur gleich aufeinander folgen lassen, sondern überdieß denselben noch zwey besondere Abschnitte über die Bruchlehre aus dem Grunde nachgetragen, um zu erzwecken, daß in dem Unterrichte dieses nicht unwichtigen Zweiges in der Arithmetik ein Haupt-Gebrechen nicht Platz greifen möge.

4tens Nahm ich die Lehre über die Rechen-Methode der welschen Praktik vor; versuchte mit einigen Exempeln sie mit der Regeldetri und der sogenannten reesischen Regel in Vergleichung zu ziehen, um den Beweis zu liefern, daß sie in so mancher Hinsicht denselben vorzuziehen seye.

Zu deren gründlichen Ausführung fügte ich ferner auch sogenannte tabellarische Schlüssel über die einfachen ausmessentlichen Theile a. eines Gulden,
b. = Zentners, und
c. = Ballen Papiers rc., nebst andern drey Auflösungs-Tabellen bey.

5tens Machte ich die Erläuterungen über berechnete Exempel Erzählungsweise, und, der Verständlichkeit wegen, öfters sehr ausführlich.

6tens Wählte ich den Titel: „über den fragenden Rechner" deswegen: weil ich mir dachte, wenn ein guter Freund den andern Etwas fragt; so erwartet der Fragende sehr natürlich eine verständliche Antwort.

Trifft diese Vergleichung in dem Vortrage meines Handbuches zu, so wäre es für mich eine große Beruhigung; denn nur dadurch könnte eigentlich der beabsichtigte gemeinnützige Zweck (der den Selbst-Unterricht betrifft) erreicht werden.

7tens Habe ich aus dieser Ursache auch, wo es immer thunlich war, Beyspiele zur Selbst-Uebung nachgetragen, die, in Folge der vorausgehenden Belehrungen, eben so behandelt werden wollen, damit ja die gutgemeinte Absicht nicht vereitelt werde.

8tens Verfolgte ich bey der ganzen Abhandlung dieses Handbuches nur die Zahlen-Rechnung allein, und führte solche praktisch aus.

Mit diesem Vorangehenden glaube ich nun die Herausgabe desselben gerechtfertigt zu haben, und erlaube mir, nur noch zu bemerken: daß alle darin aufgestellten Grundsätze sowohl, als die angegebenen Methoden, größtentheils meine eigenen Ideen, und die Frucht vieljähriger Uebung und erprobter Erfahrungen sind.

Ob ich nun hienach eine nachsichtsvolle Aufnahme in Anspruch nehmen dürfe, überlasse ich der Entscheidung des unbefangenen Publikums.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erster Theil.

Erster Abschnitt.

		Seite
Ueber einige Vorbegriffe von der Rechenkunst		1 bis 5

Zweyter Abschnitt.

Von der Numeration, nach ganz eigener Art . . . . . 6 — 14

Dritter Abschnitt.

Von der Addition mit unbenamten Zahlen . . . . . 15 — 24

Vierter Abschnitt.

Von der Subtraktion mit unbenamten Zahlen . . . . . 25 — 39

Fünfter Abschnitt.

Von der Multiplikation mit unbenamten Zahlen . . . . 40 — 50

Sechster Abschnitt.

Von der Division mit unbenamten Zahlen, nach der verkürzten Art 51 — 93

Siebenter Abschnitt.

Von der Addition, und zwar:

a. mit benamten, } Zahlen . . . . . 94 — 102
b. = gebrochenen, und } Zahlen . . . . . 102 — 117
c. = gemischten } Zahlen . . . . . 117 — 118

Achter Abschnitt.

Von der Subtraktion, und zwar:

a. mit benamten, } Zahlen . . . . . 119 — 122
b. = gebrochenen, und } Zahlen . . . . . 122 — 126
c. = gemischten } Zahlen . . . . . 127 — 130

Neunter Abschnitt.

Seite

Von der Multiplikation und Division, und zwar:

			Seite
a.	mit benamten,	Zahlen	131 bis 142
b.	= gebrochenen, und	Zahlen	142 — 147
c.	= gemischten	Zahlen	147 — 151

Zehenter Abschnitt.

Ueber die Bruchlehre, nemlich mit Bruchzahlen durch Bruchzahlen zu rechnen, und zwar:

a.	die Addition,	betreffend	152 — 157
b.	= Subtraktion,	betreffend	157 — 162
c.	= Multiplikation, und	betreffend	162 — 173
d.	= Division	betreffend	174 — 178

Eilfter Abschnitt.

Ueber die Lehre von den Brüchen, gemeinschaftlich durch alle vier Spezies . . . . 179 — 189

Zwölfter Abschnitt.

Ueber die Lehre a. von den Verhältnissen . . 190 — 196
und b. von den Progressionen . . 196 — 200
als Vorbereitung zu der nachfolgenden welschen Praktik ɾc.

Erster Theil.

Erster Abschnitt.

Ueber einige Vorbegriffe von der Rechenkunst.

1te Frage. Was ist die Rechenkunst überhaupt?

Antwort. Eine Wissenschaft, die auch Größenlehre genannt wird.

2te Frage. Was versteht man unter dem Ausdrucke Größenlehre?

Antw. Was einer Vermehrung oder Verminderung zu unterliegen hat. Z. B. Zeiten, Räume, Ursachen, Wirkungen u. s. w.

3te Frage. Worinn liegt der Grund zur Zahlenrechnung?

Antw. In der, im Allgemeinen angenommenen, sogenannten dekadischen Zählart der neun Ziffern (auch Zahlzeichen genannt,) die ursprünglich überlieferte Karaktere aus Arabien sind, und nebst der, denselben beigegebenen Null folgendes Aussehen bekommen, und so angeschrieben werden, nemlich:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

4te Frage. Wie werden diese Zahlzeichen ausgesprochen?

Antw. 1. Eins.
2. Zwey.
3. Drey.
4. Vier.
5. Fünf.
6. Sechs.
7. Sieben.
8. Acht.
9. Neun.

5te Frage. Welcher Unterschied findet unter denselben statt?

Antw. Daß jedes folgende Zahlzeichen, und zwar: von der ersten Einheit angefangen, um 1. mehr als das Vorgehende anzeigt.

6te Frage. Diesem nach nennt man die vorhin besagten Zahlzeichen auch Einheiten?

Antw. Ja! — weil sie mir so viele einzelne Dinge angeben, so viel die Größe derselben durch ein einziges Zeichen ausgedrückt werden kann. Ich denke mir

a. z. B. Sieben Stück Aepfel aufzuschreiben, bezeichne ich solche mit . . . . 7.

b. Acht Stück welsche Nüsse mit . . 8.

c. Neun Stück Zwetschgen mit . . 9.

7te Frage. Nun möchte ich aber auch gerne wissen, was es dann mit der, den genannten Zahlzeichen beygegebenen Null für eine besondere Beschaffenheit hat?

Antw. Diese ist nur die Stellvertreterin einer geltenden Ziffer, und hat aus diesem Grunde erst dann einen Werth, wenn sie derselben nachsteht. Z. B.

10. 20. 30. 40. 50. 60. 70. 80. 90.

8te Frage. Was habe ich hieraus zu lernen, daß die besagte Null den neun Zahlzeichen auf der rechten Seite beygegeben ist?

Antw. Daß eben diese Zahlzeichen hiedurch eine Zahl vorstellen, die man Zehnerzahl nennt, und daß von der Null die Stelle der Einheit stillschweigend ersetzt wird.

9te Frage. Wie spricht man diese Zahlen aus?

Antw. 10. Zehen.
20. Zwanzig.
30. Dreißig.
40. Vierzig.
50. Fünfzig.
60. Sechszig.
70. Siebenzig.
80. Achtzig.
90. Neunzig.

10te Frage. Und wenn man diesen Zehnerzahlen noch eine Null auf der rechten Seite anhängen wird, wie ist alsdann deren Aussprache?

Antw. 100. Einhundert.
200. Zweihundert.
300. Dreihundert.
400. Vierhundert.
500. Fünfhundert.
600. Sechshundert.
700. Siebenhundert.
800. Achthundert.
900. Neunhundert.

Man nennt sie daher Hunderterzahlen.

11te Frage. Aber das Verhältniß gegen die Zehnerzahlen?

Antw. Wie 1. zu 10. verhält sich auch 10. zu 100., weil

a. Zehen Einheiten eine Zehnerzahl, und
b. Zehen Zehner eine Hunderterzahl ausmachen.

12te Frage. Da ich nun bisher die sehr schön geordnete Eintheilung der Zahlzeichen, welche durch angehängte Nullen zu Zahlen erhoben worden sind, vor der Hand kennen gelernt habe; so möchte ich auch wissen, wie von 1. bis 100. diese Zahlen alle aufzuschreiben und auszusprechen sind?

Antw. Wie folgt:

1. Eins.	6. Sechs.
2. Zwey.	7. Sieben.
3. Drey.	8. Acht.
4. Vier.	9. Neun.
5. Fünf.	10. Zehen.

11. Eilf.
12. Zwölf. } Nach dem angenommenen Sprachgebrauche.

13. Dreizehn.	Statt:	Zehen	drey.
14. Vierzehn.	=	=	vier.
15. Fünfzehn.	=	=	fünf.
16. Sechszehn.	=	=	sechs.
17. Siebenzehn.	=	=	sieben.
18. Achtzehn.	=	=	acht.
19. Neunzehn.	=	=	neun.

Erläuterung.

Auch bey den nachfolgenden Zehnerzahlen ist deren Aussprache von jeher so angenommen und beibehalten worden, daß die Einheit zuerst ausgesprochen wird, und erst dann die Zehnerzahl zu benennen ist.

20. Zwanzig.
21. Ein und zwanzig.
22. Zwey und zwanzig.
23. Drey und zwanzig.
24. Vier und zwanzig.
25. Fünf und zwanzig.
26. Sechs und zwanzig.
27. Sieben und zwanzig.
28. Acht und zwanzig.
29. Neun und zwanzig.

30. Dreißig.
31. Ein und dreißig.
32. Zwey und dreißig.
33. Drey und dreißig.
34. Vier und dreißig.
35. Fünf und dreißig.
36. Sechs und dreißig.
37. Sieben und dreißig.
38. Acht und dreißig.
39. Neun und dreißig.

40. Vierzig.
41. Ein und vierzig.
42. Zwey und vierzig.
43. Drey und vierzig.
44. Vier und vierzig.
45. Fünf und vierzig.
46. Sechs und vierzig.
47. Sieben und vierzig.
48. Acht und vierzig.
49. Neun und vierzig.

50. Fünfzig.
51. Ein und fünfzig.
52. Zwey und fünfzig.
53. Drey und fünfzig.
54. Vier und fünfzig.
55. Fünf und fünfzig.
56. Sechs und fünfzig.
57. Sieben und fünfzig.
58. Acht und fünfzig.
59. Neun und fünfzig.

60. Sechszig. *)
61. Ein und sechzig.
62. Zwey und sechzig.
63. Drey und sechzig.
64. Vier und sechzig.
65. Fünf und sechzig.
66. Sechs und sechzig.
67. Sieben und sechzig.
68. Acht und sechzig.
69. Neun und sechzig.

70. Siebenzig.
71. Ein und siebenzig.
72. Zwey und siebenzig.
73. Drey und siebenzig.
74. Vier und siebenzig.
75. Fünf und siebenzig.
76. Sechs und siebenzig.
77. Sieben und siebenzig.
78. Acht und siebenzig.
79. Neun und siebenzig.

---

*) Auch sechzig der Aussprache nach.

80. Achtzig.
81. Ein und achtzig.
82. Zwey und achtzig.
83. Drey und achtzig.
84. Vier und achtzig.
85. Fünf und achtzig.
86. Sechs und achtzig.
87. Sieben und achtzig.
88. Acht und achtzig.
89. Neun und achtzig.
90. Neunzig.
91. Ein und neunzig.
92. Zwey und neunzig.
93. Drey und neunzig.
94. Vier und neunzig.
95. Fünf und neunzig.
96. Sechs und neunzig.
97. Sieben und neunzig.
98. Acht und neunzig.
99. Neun und neunzig.
100. Ein Hundert.

13te Frage. Worinn bestehen ausser der Zahlen-Kenntniß die Anfangsgründe im Rechnen?

Antw. 1tens in der Numeration.
2tens = = Addition.
3tens = = Subtraktion.
4tens = = Multiplikation, und
5tens = = Division.

14te Frage. Was haben diese fünf Abtheilungen sonst für eine Benennung?

Antw. Die erste derselben, nemlich die Numeration, besteht für sich selbst, — und die folgenden vier Abtheilungen nennt man Species (Rechnungs-Arten).

15te Frage. Aus welchem Grunde hat die Numeration für sich selbst zu bestehen?

Antw. Weil sie weder vermehrt, noch vermindert, sondern man erhält durch die Numeration nur die Anweisung, ausgesprochene Zahlen ordentlich aufzuschreiben, und diese aufgeschriebenen Zahlen richtig auszusprechen.

Was übrigens die vier Species betrifft, wird später am gehörigen Orte die Rede davon seyn.

Zweyter Abschnitt.

Von der Numeration, nach ganz eigener Art.

16te Frage. Was heißt Numeriren?

Antw. Ein Zahlengebäude herstellen, das durch zwey oder mehrere Ziffern, oder auch durch Ziffern mit einer oder mehr derselben angehängten Nullen zusammengesetzt wird, und sodann nach deren bestimmten Größe, wie die Zahl aufgeschrieben wurde, ausgesprochen werden muß.

Tabellarische über die Numeration, und zwar: von der

1te Ordnung	1.
2te detto	10.
3te detto	100.
1te Unterabtheilung, als Einheit der Tausende . .	1,000.
2te detto = = = Zehentausende .	10,000.
3te detto = = = Hunderttausende	100,000.
I. Hauptklasse, als Einheit der Million . . .	1.000,000.
	10.000,000.
	100.000,000.
4te Unterabtheilung	1,000.000,000.
5te detto	10,000.000,000.
6te detto	100,000.000,000.
II. Hauptklasse, als Einheit der Billion .	1:000,000.000,000.
	10:000,000.000,000.
	100:000,000.000,000.
7te Unterabtheilung	1,000:000,000.000,000.
8te detto	10,000:000,000.000,000.
9te detto	100,000:000,000.000,000.
III. Hauptklasse	1;000,000:000,000.000,000.
	10;000,000:000,000.000,000.
	100;000,000:000,000.000,000.
10te Unterabtheilung . .	1,000;000,000:000,000.000,000.
11te detto	10,000;000,000:000,000.000,000.
12te detto . . .	100,000;000,000:000,000.000,000.
IV. Hauptklasse . .	1::000,000;000,000:000,000.000,000.

17te Frage. Das verstehe ich nun vor der Hand schon, daß aus mehr zusammengesetzten Ziffern, oder auch mit Nullen verbunden, Zahlen gebildet werden; — allein, ich möchte auch den Grund hievon kennen lernen, nach welchem eine, z. B. sehr große Zahl mit Verlässigkeit auszusprechen ist, und worauf man sich eigentlich zu verlassen hat, um ja nie in die Verlegenheit zu kommen, einer Irrung im Numeriren zu unterliegen. An was hat man sich hierin zu halten?

Antw. An nachfolgende tabellarische Darstellung, die das ganze, sehr einfache Verfahren der Numeration in sich schließt, und jeden, auch den geringsten Zweifel auf einmal benimmt, da diese Eintheilung bis in das Unendliche eine und dieselbe bleibt.

Darstellung

Einheit angefangen bis zu einer Quatrillion.

Einheit.
Zehnerzahl.
Hunderterzahl.

Eintausenderzahl.
Zehentausenderzahl.
Hunderttausenderzahl.

Eine Million, oder Zehenhunderttausend.
Zehen Millionen.
Hundert Millionen.

Eintausend Millionen.
Zehentausend Millionen.
Hunderttausend Millionen.

Eine Billion, oder Zehenhunderttausend Millionen.
Zehen Billionen.
Hundert Billionen.

Eintausend Billionen.
Zehentausend Billionen.
Einhunderttausend Billionen.

Eine Trillion, oder Zehenhunderttausend Billionen.
Zehen Trillionen.
Hundert Trillionen.

Eintausend Trillionen.
Zehentausend Trillionen.
Hunderttausend Trillionen.

Eine Quatrillion, oder Zehenhunderttausend Trillionen.

18te Frage. Diese tabellarische Darstellung gefällt mir recht gut, und ich glaube bald in den Stand gesetzt zu seyn, das am Ende so groß erscheinende Zahlengebäude kennen zu lernen, nur möchte ich gerne noch erfahren, was denn sonst weiters hierin zu wissen nothwendig ist?

Antw. Daß

1tens zu einer Einheit	. . . . 1ne	}	Ziffern gehören.
= = Zehnerzahl	. . . 2		
= = Hunderterzahl	. . 3		
= = Tausenderzahl	. . 4		
= = Zehentausenderzahl	. 5		
= = Hunderttausenderzahl	6		
= = Million=Zahl	. . 7		

(als zur I. Hauptklasse.)

Zu einer Billion, als der II. Hauptklasse 13 Ziffern.
= = Trillion, = = III. = 19 =
= = Quatrillion = = IV. = 25 = und
zu jeder darauffolgenden Hauptklasse jedesmal 6 Ziffern mehr genommen werden müssen.

2tens Die sehr natürliche Folgenreihe, von der Einheit angefangen bis in das Unendliche fort, hauptsächlich darin liege, daß es heißt:

{ Eins
Zehen
Hundert.

{ Eintausend
Zehentausend
Hunderttausend.

{ Eine Million
Zehen Millionen
Hundert Millionen.

{ Eintausend Millionen
Zehentausend Millionen
Hunderttausend Millionen u. s. f.

3tens Die Interpunktions=Zeichen von drei zu drei Ziffern, und zwar: von der rechten gegen die linke Hand zu, ge=

hörig gemacht werden müssen, wie die obige Darstellung deutlich an die Hand giebt, welche darin bestehen: daß das Zeichen der Tausende durch ein Komma (auch Beistrich genannt) angezeigt wird; — jenes der Millionen, Billionen, Trillionen und Quatrillionen rc. aber mit einem, zwei, drei oder vier Punkten rc. zu machen ist, dann kann es an der richtigen Aufschreibung einer Zahl, und dieselbe eben so auszusprechen, nie fehlen.

4tens Ist ferner begreiflich zu machen, daß von der Einheit angefangen jede darauf folgende Ordnung, Unterabtheilung und Hauptklasse immer einen zehenfachen Werth mehr hat, als die Vorgehende. Z. B.

Zehen	1er	geben	einen	10ner
=	10ner	=	=	100ter
=	100ter	=	=	1,000ter
=	1,000ter	=	=	10,000ter
=	10,000ter	=	=	100,000ter
=	100,000ter	=	eine	1.000,000 rc.

Besondere Bemerkung.

Daß auf die Vorkenntnisse im Rechnen, nemlich: auf die Zahlen-Aussprache, welche die Abtheilung der Numeration ausmacht, bisher im Allgemeinen sehr wenig geachtet wurde, habe ich sprechende Beweise zur Genüge bekommen; — indessen ist dieses ein Gegenstand, der doch am ersten berücksichtiget zu werden verdiente; worüber ich jedoch aus Bescheidenheit, mich umständlicher einzulassen, nicht für gut, auch nicht für nothwendig finde.

Ferner habe ich mich schon mehrmalen überzeugt, daß jeder Schüler rc., dem ich bisher Unterricht im Rechnen gab, die Numeration in ihrem ganzen Umfange sehr leicht erlernte, und so mancher gleichsam eine Freude darüber bezeugte, in so kurzer Zeit, ja, ich darf sagen, in einigen Stunden dieselbe vollständig aufgefaßt zu haben; — dagegen überzeugte ich mich eben sowohl, daß öftere Wiederholungen, z. B. bey Gelegenheit von großen Additions-Exempeln in unbenamten Zahlen, die richtige Aufschreibung und Aussprache noch fester begründen wür-

den, und wirklich so in das Gedächtniß einprägen möchte, daß dieselbe, nemlich die Numeration, nie mehr vergessen werden kann, wenn man besonders, was ich nicht vorenthalten will, den Schüler öfters fragt: Wie viel braucht man Ziffern

a. zu einer Millionzahl,
b. = = Hunderttausend Millionzahl,
c. = = Zehentausend Billionzahl? ꝛc.

19te Frage. Durch obige tabellarische Darstellung lernte ich gleichwohl von 1. bis zu 1 Quatrillion die ganz einfache und sehr natürliche Eintheilung kennen; aber nur mit einer geltenden Ziffer, weil die übrigen Ordnungen, Unterabtheilungen und Hauptklassen durchaus mit Nullen ersetzt worden sind; — nun möchte ich auch Zahlen auszusprechen lernen, welchen alle neun Zahlzeichen beygegeben sind, oder auch mit Nullen verbunden vorkommen; was wird bey dergleichen Zahlen zu beobachten seyn?

Antw. Daß man jeder Ziffer die gehörige Benennung gebe, in welcher Ordnung, Unterabtheilung oder Hauptklasse sie sich befindet. Z. B.

796.

Das ist also eine Hunderterzahl, von welcher
a. der 7er Siebenhundert,
b. = 9er Neunzig, und
c. = 6er Sechs Einheiten angiebt, verkürzt aber ausgesprochen wird:

Siebenhundert, sechs und neunzig.

1,234.

Dieses ist eine Tausenderzahl, nemlich:
Eintausend,
Zweihundert,
Dreißig und
Vier. Verkürzt aber:
Eintausend, zweihundert, vier und dreißig.

54,321.

Dieses ist eine Zehentausenderzahl, nemlich:

Fünfzig vier Tausend,
Dreihundert,
Zwanzig und
Eins. Oder verkürzt:

Vier und fünfzigtausend, Dreihundert, Ein und zwanzig.

123,456.

Dieses ist eine Hunderttausenderzahl, nemlich:

Einhundert }
Zwanzig } Tausend,
Drei }
Vierhundert,
Fünfzig und
Sechs. Oder verkürzt:

Einhundert, Drei und zwanzig Tausend, Vierhundert, Sechs und fünfzig.

7.654,321.

Dieses ist eine Millionzahl, und zwar von der I. Hauptklasse, nemlich:

Sieben Millionen,
Sechshundert }
Fünfzig } Tausend,
Vier }
Dreihundert,
Zwanzig und
Eins. Oder verkürzt:

Sieben Millionen, Sechshundert vier und fünfzig Tausend, Dreihundert, Ein und zwanzig.

12.345,678.

Dieses ist eine Zehen Millionzahl, nemlich:

Zwölf Millionen,
Dreihundert }
Vierzig und } Tausend,
Fünf }
Sechshundert,
Siebenzig und
Acht. Oder verkürzt:

Zwölf Millionen, Dreihundert, Fünf und vierzig Tausend, Sechshundert, Acht und siebenzig.

987.654,321.

Dieses ist eine Hundert Millionzahl, nemlich:

Neunhundert
Achtzig und
Sieben } Millionen,

Sechshundert
Fünfzig und
Vier } Tausend,

Dreihundert,
Zwanzig und
Eins. Oder verkürzt:

Neunhundert Sieben und achtzig Millionen, Sechshundert Vier und fünfzig Tausend, Dreihundert Ein und zwanzig.

1,234.567,890.

Dieses ist eine Tausend Millionzahl, und zwar:

Eintausend
Zweihundert
Dreißig und
Vier } Millionen,

Fünfhundert
Sechzig und
Sieben } Tausend,

Achthundert und
Neunzig. Oder verkürzt:

Eintausend, Zweihundert vier und dreißig Millionen, Fünfhundert sieben und sechzig Tausend, Achthundert und neunzig.

908,070:605,040.302,010.

Dieses ist eine Hunderttausend Billionzahl, und wird so ausgesprochen:

Neunhundert, Achttausend siebenzig Billionen, Sechshundert Fünftausend vierzig Millionen, Dreihundert zwey Tausend und Zehen.

Erläuterung.

Diejenige Stelle, die mit einer Null besetzt ist, z. B.

a. die Einheit,
b. = Zehner, oder
c. = Hunderterzahl, muß in der Aussprache mit Stillschweigen umgangen werden, ohne zu sagen:
ad a. keine Einheit,
= b. kein Zehner,
= c. kein Hunderter.

20te Frage. Findet nicht auch noch sonsten eine andere Abtheilung der Zahlen statt, diese zu wissen ein wesentliches Bedürfniß ist?

Antw. Ja freilich; sie werden nemlich eingetheilt:
a. in runde
b. = ungerade, und } Zahlen.
c. = gerade

ad a. Eine runde Zahl ist diejenige, welche am Ende eine Null hat. z. B.

10. 20. 30. 100. ꝛc.

ad b. Eine ungerade Zahl hingegen (welche auch Primzahl oder Selbstständig genannt wird) ist eine solche, die sich durch die Ziffer 2. nicht ohne Rest theilen läßt, und aus keiner vorgehenden kleinern Zahl durch die Multiplikation erwachsen ist, sondern von sich selbst ihren Anfang hat, wie z. B.

2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. ꝛc.

Primzahlen genannt werden, weil sie aus keinen andern Faktoren entstehen können, als aus

2 mal 1. — 3 mal 1. — 5 mal 1. — 7 mal 1. u. s. w.

ad c. Eine gerade Zahl ist aber diejenige, welche durch die Ziffer 2. ohne Rest theilbar ist, z. B.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 658. ꝛc.

Bemerkung.

Die vorausgehende Detailirung über die bereits abgehandelte Numeration, nemlich: die Kenntniß der Zahlen = Aussprache betreffend, wird jedem Lernbegierigen um so erwünschter seyn, wenn er durch eine solche Uebung, die nicht viel Kopfverreißens

erfodert, in den Stand gesetzt wird, jede vorkommende Zahl, und wäre sie noch so groß, sehr leicht aufschreiben oder eben so aussprechen zu können.

Nun folgen Uebungs-Beyspiele:

5::347,981;655,734:883,962.477,519.
300,745;000,698:405,009.061,230.
83,000;454,000:070,990.300,001.
4,450;930,584:685,199.006,778.
248;102,345:176,086.731,504.
60;000,507:000,385.500,097.
5;000,006:000,001.000,000.
758,332:891,000.364,521.
90,999:666,077.444,333.
1,387:040,205.198,070.
234:905,380.270,659.
34:567,890.123,456.
4:321,098.765,400.
500,600.700,800.
63,057.030,904.
7,700.827,541.
836.000,075.
90.083,129.
8.303,710.
760,955.
61,044.
5,007.
406.
31.

24 Beyspiele zur eigenen Uebung, und zwar: von der Quatrillion bis zur Zehnerzahl herunter.

Besondere Bemerkung.

Mit diesen 24 Uebungs-Beyspielen wird nun der Abschnitt über die Numeration hiemit beschlossen; zugleich aber wiederholt bemerkt: daß die Erlernung derselben, nach der bereits gegebenen Anleitung, als erste sehr nöthige Grundlage zum Rechnen stets in dem Gedächtniß bleiben werde.

Dritter Abschnitt.

Von der Addition mit unbenamten Zahlen.

21te Frage. Was heißt Addiren?

Antw. Zusammenzählen, d. i. mehrere gegebene Zahlen unter eine zu suchende Zahl bringen, die so viel ausspricht, als die einzelnen Zahlen zusammengenommen ausmachen.

22te Frage. Wie nennt man die gegebenen Zahlen?

Antw. Posten.

23te Frage. Die neugefundene Zahl aber?

Antw. Summe.

24te Frage. Was ist denn wohl bey dieser Spezies noch besonders zu beobachten nothwendig?

Antw. Daß man die gegebenen Zahlen (auch Posten genannt) in gehöriger Ordnung unter einander setze, das will so viel sagen: weil man die Zahlen von der linken zur rechten Hand aufschreibt;

a. die Hunderttausender unter Hunderttausender,
b. die Zehentausender unter Zehentausender,
c. die Hunderter unter Hunderter,
d. die Zehner unter Zehner, und
e. die Einheit unter die Einheit.

25te Frage. Ist sonsten noch etwas zu berücksichtigen?

Antw. Die gegebenen Zahlen sind von der zu suchenden Summe durch einen Querstrich abzusöndern, und die Zusammenzählung muß von der Rechten zur Linken geschehen.

26te Frage. Nun möchte ich aber auch wissen, was eine unbenamte Zahl ist?

Antw. Eine unbenamte Zahl ist diejenige, welche nicht mehr und nicht weniger sagt oder anzeigt, als sie der Aussprache nach vorstellt. Z. B.

Posten	8,705.
	7,221.
	9,098.
	9,543.
Summe	34,567.

Erläuterung.

Diese vier Posten machen, zusammengenommen, eine Summe von 34,567. aus, ohne irgend derselben eine andere bestimmte Benennung zu geben.

Die Hinaufzählung dieses vorstehenden Exempels wird nun, wie oben gedacht, zur rechten Hand bey der Einheit angefangen, und gesagt:

3 und 8 ist 11. und 1 ist 12. und 5 ist 17. Das ist 1 Zehner und 7 Einheiten, oder 17 Einheiten.

Hievon werden die 7 Einheiten unter die Reihe der Einheiten gesetzt, den einfachen Zehner aber behält man im Sinne, zählt denselben zu der nächstfolgenden Zehnerreihe, und sagt ferner:

1 und 4 ist 5. und 9 ist 14. und 2 ist 16. (die Null zählt, wie bekannt, nichts.)

Von dieser Zahl, welche 16 Zehner oder 160 Einheiten ausspricht, werden nun die 6 Zehner unter die Zehnerreihe gesetzt, und der einfache 1 Hunderter zu der Hunderterreihe gezählt, wie folgt:

1 und 5 ist 6. und 2 ist 8. und 7 ist 15. Also 15 Hunderter, oder 1,500 Einheiten.

Die 5 Hunderter müssen nun unter die Hunderterreihe gesetzt, und der einfache 1 Tausender zu der Eintausenderreihe gezählt werden, und zwar:

1 und 9 ist 10. und 9 ist 19. und 7 sind 26. und 8 sind 34.

Diese Zahl 34. wird ganz angesetzt, und somit die Addition vorstehenden Exempels mit der Summe 34,567. beschlossen.

Bemerkung.

Bevor ich mehrere Beyspiele dieser Art, vielmehr auch andere Vortheile von der Addition vorzeige, glaube ich vor allem Andern bemerken zu müssen: Es sey bey Ausübung der Rechenkunst durch alle Rechnungsarten und verschiedenen Methoden für eine Haupt-Regel zu hal-

ten, daß nemlich über jedes Rechnungs = Exempel, wie geringfügig solches auch seyn mag, die Probe gemacht werde.

Die Probe, welche jedesmal auf eine, oder mehr entgegengesetzte Arten des Exempels gemacht werden soll, und gemacht werden muß, ist die Seele der Rechnung, die erste Grundlage, und der erste Anhaltspunkt, auf welche der Richtigkeit wegen gebaut werden kann und darf, weil man durch sie gleichsam die zuverläßigste Ueberzeugung sich selbst verschafft, ob man richtig rechnete, oder ob man gefehlt habe oder nicht.

Bey der Addition besteht nun dieselbe Probe (als Ueberzeugungs-Mittel) darin: daß man das vorbesagte Additions = Exempel, wie solches Rechts von unten hinauf addirt wurde, dasselbe eben so, aber umgekehrt, von oben herunter zusammenzählen müsse.

Kommt die nemliche Summe hiedurch heraus, so liegt der Beweis ziemlich klar vor Augen, daß das erstemal im Hinaufzählen nicht gefehlt worden sey, indem das zweyte Resultat mit dem ersten ganz gleichlautend befunden wurde.

Es lassen sich aber auch bey der Addition, besonders mit unbenamten Zahlen, noch andere Proben anstellen. Z. B.

a.	b.	c.	
8,705.	8,705.	8,705.	
7,221.	7,221.	7,221.	
9,098.	9,098.		15,926.
9,543.	9,543.	9,098.	
		9,543.	
17.	33		18,641.
15	14	Summa	34,567.
14	15		
33	17.		
Summa 34,567.	34,567.		

Erläuterung.

Bey dem Exempel

ad a. wird die erste Reihe rechts hinaufgezählt, und das herausgekommene Resultat mit 17. gleich angesetzt; — mit der zweiten, dritten und vierten Reihe wird eben so verfahren, nur daß man immer um eine Ziffer der linken Seite zu,

weiter rückwärts die Zahl unterschreiben muß. Diese Probe hat die Richtigkeit des obigen Exempels bewährt.

Bey dem Prob = Exempel

ad b. wird die erste Reihe links hinaufgezählt, und das Resultat hievon mit 33. ebenfalls ganz angesetzt; — übrigens aber, wie vorgedacht, jedoch gegen die rechte Hand zu, um eine Ziffer vorwärts die Zahl angeschrieben.

Endlich bey dem Prob = Exempel

ad c. wird in der Mitte (oder wenn es ein Exempel mit mehreren Posten ist, auch weiter unten oder oben) ein Querstrich durchgemacht, die untern und obern zwei Posten besonders zusammengezählt, die Resultate hievon rechts angeschrieben, und dann ebenfalls unter eine Summe gebracht.

Diese letzte Probe ist vorzüglich bey einem großen Exempel, wo viele Posten vorkommen, sehr nützlich anzuwenden, weil man bey einem solchen Exempel, nach bereits vorausgegangener Addition, im Ganzen mehrere Abtheilungen machen kann, und dadurch in den Stand gesetzt wird, sich von der reelen Richtigkeit des Verfahrens genau zu überzeugen.

Man kann die Probe über jedes Rechnungs = Exempel zu machen gar nicht genug anempfehlen; denn, wie leicht ist es geschehen, daß im Rechnen ein Fehler einschleicht? — (und sey er auch der Unbedeutendste) der aber lediglich sich nur durch die vorgeschriebene Probe allein entdecken läßt, und eben dadurch eine Reinheit der gemachten Berechnung erzielt werden kann, und erzielt werden wird; — und! — wem sollte wohl nicht sehr viel daran gelegen seyn, sich durch eine kleine Mühe die richtigste Ueberzeugung seiner Arbeiten selbst zu verschaffen? —

Da ferner an einer richtigen Addition außerordentlich viel gelegen ist, und es hierinn hauptsächlich nur darauf ankommt, mit welchem Grund oder besondern Vortheilen man diese Spezies gleich bey dem ersten Beginnen des Unterrichtes erlerne; so will ich zum Behufe dessen nachfolgende acht Additions = Exempel in systematischer und tabellarischer Form einer besondern Aufmerksamkeit hiemit empfohlen haben, und zwar:

I. Additions-Tabelle.

	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Summen	11	10	9	8	7	6	5	4	3

II. Additions-Tabelle.

	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Summen	12	11	10	9	8	7	6	5	4

III. Additions-Tabelle.

	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Summen	13	12	11	10	9	8	7	6	5

IV. Additions-Tabelle.

	5	5	5	5	5	5	5	5	5
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Summen	14	13	12	11	10	9	8	7	6

V. Additions-Tabelle.

	6	6	6	6	6	6	6	6	6
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Summen	15	14	13	12	11	10	9	8	7

VI. Additions-Tabelle.

	7	7	7	7	7	7	7	7	7
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Summen	16	15	14	13	12	11	10	9	8

VII. Additions-Tabelle.

	8	8	8	8	8	8	8	8	8
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Summen	17	16	15	14	13	12	11	10	9

VIII. Additions-Tabelle.

	9	9	9	9	9	9	9	9	9
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Summen	18	17	16	15	14	13	12	11	10

Bemerkungen.

So einfach auch diese Additions-Tabellen, vielmehr Exempel zu seyn scheinen; so geht ein desto mehrfacher Nutzen aus dem Gebrauch derselben dadurch hervor; nachdem man nicht nur jede Verbindung der Zahlzeichen, und zwar von 1. bis 18. einschlüßig genau kennen lernt, sondern durch öftere Wiederholungen derselben einen großen Vortheil zur Addition überhaupt sich selbst eigen machen kann, vermög welchem man zugleich in den Stand gesetzt wird, von 1. bis 100. ꝛc. eben so leicht, und auf eine ungezwungene Weise fortaddiren zu können.

Der Gebrauch eben dieser acht Tabellen giebt sich übrigens von selbst an die Hand, und wenn sie z. B. einem Schüler zur Uebung vorgelegt werden sollten, derselbe zur rechten Seite mit dem Zusammenzählen der ersten Tabelle den Anfang macht; so möchte es wohl nicht schwer halten, bis er alle diese Tabellen durchgangen hat, daß ihm die vorkommenden verschiedenen Verhältnisse vollkommen bekannt seyn müssen, sofort

die Frage: Wie viel 8. und 9. oder 7. und 6. oder 3. und 5. ausmacht? sogleich zu beantworten vermag.

Hier muß ich aber noch besonders erinnern, daß bey Erlernung einer ganz ungezwungenen (man dürfte fast sagen: ungekünstelten) Addition, der einzige und entsprechendste Vortheil nur der seye, daß man bey Ausübung derselben die zwey sonst üblichen Wörter, nemlich:

und, so wie auch ist

beym Zusammenzählen ganz weglassen müsse, und solche nur im Sinne behalten darf, (ist ein nützlicher Theil von der Kopfrechnung) welcher Vortheil, wenn derselbe gleich bey vorstehenden acht Tabellen genau beobachtet wird, gewiß von einem sehr guten Erfolg seyn dürfte; denn diese zur Addition ganz unnöthigen zwey Wörter dienen zu weiter nichts Andern, als dazu: daß sie, besonders bey großen Exempeln, wo viele auf einanderfolgende Ziffern zusammengezählt werden müssen, am Zusammenzählen hinderlich sind, weil man — bis und und ist ausgesprochen wird, längst die darauffolgenden Ziffern als Zahlen ausgesprochen hat.

Nur daran gewöhnen muß man sich, und eine kleine Mühe, sich daran gewöhnen zu wollen, nicht verdrüßen lassen, dann geht es gewiß recht leicht damit, und wer sich einmal wirklich daran gewöhnt hat, wird in kurzer Zeit (ich wollte wetten darauf) viel und doch richtig und zuverläßig zusammenzählen können.

Statt daß man nun bey der ersten dieser Tabellen sagt, bey welcher rechts angefangen wird,

1.	und	2.	ist	3.	muß	gleich	gesagt	werden :	Drey.
2.	=	2.	=	4.	=	=	=	=	Vier.
3.	=	2.	=	5.	=	=	=	=	Fünf.
4.	=	2.	=	6.	=	=	=	=	Sechs.
5.	=	2.	=	7.	=	=	=	=	Sieben.
6.	=	2.	=	8.	=	=	=	=	Acht.
7.	=	2.	=	9.	=	=	=	=	Neun.
8.	=	2.	=	10.	=	=	=	=	Zehen.
9.	=	2.	=	11.	=	=	=	=	Eilf.

Diese Methode, zu addiren, ist für das Gedächtniß schon aus dem einzigen Grunde sehr vortheilhaft, weil dasselbe sich nur mit jeder folgenden Zahl beschäftigt, die durch mehrere in Verbindung gesetzte Zif-

fern zum Vorschein kommen, da es durch die nur irreleitenden und den ganzen Sinn störenden Wörter und und ist, wenn solche nur gedacht, aber nicht ausgesprochen werden, nicht unterbrochen wird; — und es dürfte auch wirklich nicht undienlich seyn, wenn der Lehrer in der Schule beym ersten Beginnen des Additions=Unterrichtes ein besonderes Augenmerk hierauf nehmen, und die zu bildende Jugend hienach anleiten würde.

Damit aber auch der eigentliche Zweck zur Erlangung einer gründlichen Addition erreicht werden möge, von welcher oft so Vieles abhängt; so will ich noch nachstehende Beyspiele zur besondern Uebung vortragen, und zwar:

I. Additions = Tabelle.

	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Summen	81	72	63	54	45	36	27	18	9

II. Additions = Tabelle.

	8	9	8	7	5	4	3	2	1
	9	8	7	6	4	3	2	1	2
	8	9	8	7	5	4	3	2	1
	9	8	7	6	4	3	2	1	2
	8	9	8	7	5	4	3	2	1
	9	8	7	6	4	3	2	1	2
	8	9	8	7	5	4	3	2	1
	9	8	7	6	4	3	2	1	2
	8	9	8	7	5	4	3	2	1
Summen	76	77	68	59	41	32	23	14	13

Bemerkungen.

Nur durch mehrmal wiederholtes Hinauf= und Herunterzählen dieser ebenfalls sehr einfachen Exempel (dergleichen man zu eigener Uebung auch mit noch mehr Ziffern ansetzen kann) erhält man den wahren Grund zu einer schnellen, vielmehr geläufigen Addition.

Auch muß beym Zusammenaddiren dieser Beyspiele vorzüglich darauf Rücksicht genommen werden, daß man die zwey Wörter und und ist ja nicht hören lasse, sondern dieselben nur im Sinne behalte.

Man nehme z. B. von der ersten Tabelle die Reihe der 6er zum Hinaufzählen, und so auch zum Herunterzählen, behalte jedoch dabey immer das Grundverhältniß (will ich es nennen) von 1. bis 18. vor Augen, und sage:

Sechs, zwölf, achtzehn, wohl gemerkt: jetzt kommt vier und zwanzig. Ob ich nun sage, vielmehr mir es denke:

18. und 6. ist 24., oder 8. und 6. ist 14., so ist es gerade das Nemliche.

Weiter;

24. und 6. ist 30., oder 4. und 6. ist 10.

Nur dieses Gleichheits=Verhältniß sich recht in das Gedächtniß eingeprägt, dann geht es, wie schon gedacht, sehr leicht.

Ferner:

30.	und	6.	ist	36.	oder	10.	und	6.	ist	16.	Der deutlichen Erklärung willen mußte ich hier von den zwei Worten und und ist Gebrauch machen.
36.	=	6.	=	42.	=	6.	=	6.	=	12.	
42.	=	6.	=	48.	=	12.	=	6.	=	18.	
48.	=	6.	=	54.	=	8.	=	6.	=	14.	

Nun auch zu einer fernern Uebung von der zweiten Tabelle mit der vermischten 7ner und 8ter Reihe, und zwar:

8.	und	7.	ist	15.							Gilt hier obige Bemerkung wegen und und ist.
15.	=	8.	=	23.	oder	5.	und	8.	ist	13.	
23.	=	7.	=	30.	=	3.	=	7.	=	10.	
30.	=	8.	=	38.	=	10.	=	8.	=	18.	
38.	=	7.	=	45.	=	8.	=	7.	=	15.	
45.	=	8.	=	53.	=	5.	=	8.	=	13.	
53.	=	7.	=	60.	=	3.	=	7.	=	10.	
60.	=	8.	=	68.	=	10.	=	8.	=	18.	

So wie nun dieses gleiche Verhältniß hier vorgezeigt ist, so findet solches durch alle mögliche Klassen statt, weil die ganze Eintheilung der Addition durchgehends eine recht natürliche und ungekünstelte Lage hat.

Nach diesen vorausgegangenen einfachen Uebungs=Beyspielen kann man dann gleich zu größern Exempeln übergehen, und auf die ähnliche Art, wie das folgende Exempel nebst der darüber gemachten Probe vorgetragen ist, sich mehrere dergleichen Beyspiele selbst aufgeben, und zwar:

	5.725,486.	
	4.054,893.	
	48,937.	
	9,354.	
	62,045.	
	390,892.	
	6.108,439.	16.400,046.
	208.	
	82.770,834.	
	23.369,178.	
	870,621.	
	39,054.	
	6,540.	
	213.	
	95.	107.056,743.
Summa	123.456,789.	
		123.456,789. Probe.

Bemerkung.

Bey einem solchen großen Exempel ist es sehr gut, wenn bey einem jeden Posten die Unterscheidungszeichen ordentlich gemacht werden, weil man im Zusammenzählen sich weniger irren kann.

Da ich nun glaube, über diese Spezies der Addition so viel, als nur immer erforderlich war, gesagt zu haben; so wird es mir erlaubt seyn, daß ich noch folgende besondere Meinung darüber machen darf.

Es soll z. B. ein Geschäftsmann, dessen Beruf es eigentlich mit sich bringt, vielerlei Additionen tagtäglich vornehmen zu müssen, dieses Rechenbuch auf welch immer eine Art, durch Ankauf desselben, oder sonst zufälliger Weise unter die Hand bekommen, im Durchblättern auf diesen dritten Abschnitt der Addition stossen, und ihn würdig erachten, denselben durchzulesen; so wäre es ja doch wohl möglich, daß diese sehr einfache, aber gründliche Art zu Addiren in ihm den Wunsch rege machen könnte, einen Versuch damit anzustellen, und somit könnte es gelingen, daß durch den ersten Versuch ein zweiter nachfolgen, und durch den dritten ꝛc. die ganze leichte verkürzte Art zu addiren erlernt wäre.

Es erfodert übrigens diese besagte Art zur Addition gar keine große Anstrengung, wie man sich es vielleicht vorstellen mag; sondern solche

hängt lediglich nur von einer fleißigen Uebung ab, die in kurzer Zeit zur Gewohnheit werden muß; so zwar, daß, wer sich einmal eben diese oft erwähnte Art zu addiren zur Regel gemacht hat, für immer dabey bleiben, und auf keine andere Manier dieselbe mehr fortsetzen wird.

Nun folgen Uebungs = Beyspiele:

3,705.	2,689.	1,322.	5,728.
4,653.	357.	4,701.	9,237.
2,589.	786.	2,905.	4,605.
9,237.	13,968.	3,487.	1,086.
1,086.	8,579.	8,109.	2,589.
5,728.	529.	1,205.	3,755.
Summa	Sa.	Sa.	Sa.

3,648.	3,798.	3,687.	7,546.
5,793.	10,378.	4,536.	6,969.
1,850.	3,967.	2,288.	4,396.
9,466.	574.	9,029.	658.
2,147.	2,646.	1,753.	8,788.
4,078.	555.	5,706.	259.
3,965.	6,086.	2,062.	389.
Summa	Sa.	Sa.	Sa.

4,466.	1,234.	3,248.	2,007.
3,780.	5,678.	657.	1,638.
2,893.	9,012.	4,568.	4,223.
1,588.	3,456.	11,089.	9,759.
5,677.	7,890.	746.	5,786.
6,188.	1,234.	2,575.	3,588.
2,395.	2,567.	7,123.	95.
7,023.	3,940.	2,306.	7,973.
Summa	Sa.	Sa.	Sa.

9,237.	786.	2,345.
5,728.	2,698.	6,789.
3,757.	8,509.	1,234.
2,589.	47.	4,567.
4,605.	16,032.	3,898.
1,086.	109.	9,099.
5,644.	2,826.	2,436.
Summa	Sa.	Sa.

Wenn diese speziellen Summen unter eine Haupt = Summa gebracht werden, so heißt deren Resultat:

450,075.

Vierter Abschnitt.

Von der Subtraktion in unbenamten Zahlen.

27te Frage. Was heißt Subtrahiren?

Antw. Eine kleinere bekannte Zahl von einer gegebenen größern Zahl Einmal abziehen, das ist, eine neue Zahl suchen, die so groß ist, als der Unterschied zwischen dieser größern und jener kleinern Zahl.

28te Frage. Wie nennt man die gegebene größere Zahl?

Antw. Subtrahendus.

29te Frage. Wie die kleinere, mit welcher abgezogen wird?

Antw. Subtraktor.

30te Frage. Diejenige Zahl aber, die durch das fragliche Abziehen herauskommt?

Antw. Rest, Unterschied oder Differenz.

31te Frage. Wie ist der Ansatz beym Subtrahiren zu machen?

Antw. Die gegebene größere Zahl ist oben, und jene kleinere Zahl unter dieselbe zu setzen, darunter ein Querstrich zu machen, unter welchen der verbliebene Rest gesetzt werden muß.

Ferner ist das nemliche Verfahren, wie bey der Addition, zu beobachten, daß nemlich Tausender unter Tausender, Hunderter unter Hunderter, Zehner unter Zehner und Einheiten unter Einheiten zu stehen kommen.

32te Frage. Auf welche Art kann bey der Subtraktion die Probe gemacht werden?

Antw. Durch die Addition, und zwar: der Rest wird mit dem Subtraktor zusammenaddirt, und die Zahl des Subtrahendus muß hiedurch zum Vorschein kommen. Z. B.

a.		b.	c.
56,789.	Subtrahendus.	967,789.	5.476,832.
45,678.	Subtraktor.	313,468.	3.214,721.
11,111.	Rest.	654,321.	2.262,111.
56,789.	Probe.	967,789.	5.476,832.

Erläuterung.

Die Subtraktion wird, wie die Addition, ebenfalls Rechts bey der Einheit angefangen, und somit gesagt: Bey dem Exempel ad a.

8	von	9	bleibt	1.		Rest
7	=	8	=	1.		11,111.
6	=	7	=	1.		
5	=	6	=	1.		
3	=	4	=	1.		

Diesen Rest mit 11,111. zu dem Subtraktor 45,678. gezählt, giebt zur Probe den Subtrahend mit 56,789.

Bey dem Exempel ad b.

8	von	9	bleibt	1.		Rest
6	=	8	=	2.		654,321.
4	=	7	=	3.		
3	=	7	=	4.		
1	=	6	=	5.		
3	=	9	=	6.		

Bey dem Exempel ad c. sagt man ferner:

1	von	2	bleibt	1.		Rest
2	=	3	=	1.		2.262,111.
7	=	8	=	1.		
4	=	6	=	2.		
1	=	7	=	6.		
2	=	4	=	2.		
3	=	5	=	2.		

33te Frage. Das begreife ich nun sehr leicht, daß, wenn ich 8. von 9. abziehe, mir 1. zum Rest bleibt. Wenn aber bey dem Subtraktor Ziffern vorkommen sollten, die größer sind, als jene bey dem Subtrahend, wie werde ich mich dabey zu benehmen haben?

Antw. In einem solchen Falle muß man zum Entlehnen Zuflucht nehmen. Z. B.

	a.	b.	c.	d.	e.
	51.	752.	6,721.	52,123.	800,000.
	32.	574.	4,894.	39,778.	145,679.
	19.	178.	1,827.	12,345.	654,321.
Probe:	51.	752.	6,721.	52,123.	800,000.

Erläuterung.

Man sieht hier gleich bey dem ersten Exempel ad a., daß 2. von 1. nicht abgezogen werden konnte; daher von der Zehnerzahl 5. ein Zehner entlehnt werden mußte. Nun konnte man sagen: 2 von 11 bleibt 9. und
3 = 4 = 1., (weil von 5. eins entlehnt worden ist, so durfte aus diesem Grunde die besagte Ziffer 5. in der Zehnerzahl nur mehr für 4 Zehner angesehen werden.)

Weiter bey dem Exempel ad b. hat es geheißen:

4 von 12 bleibt 8.
7 = 14 = 7.
5 = 6 = 1.
Rest 178.

Bey dem Exempel ad c.

4 von 11 bleibt 7.
9 = 11 = 2.
8 = 16 = 8.
4 = 5 = 1.
Rest 1,827.

Bey dem Exempel ad d.

8 von 13 bleibt 5.
7 = 11 = 4.
7 = 10 = 3.
9 = 11 = 2.
3 = 4 = 1.
Rest 12,345.

Bey dem Exempel ad e.

9 von 10 bleibt 1.
7 = 9 = 2.
6 = 9 = 3.
5 = 9 = 4.
4 = 9 = 5.
1 = 7 = 6.
Rest 654,321.

34te Frage. Aus diesen ersten vier Exempeln von ad a. bis ad d. habe ich wahrnehmen können, daß ich immer der linken Seite zu Eins entlehnen mußte, ob es ein Zehner, ein Hunderter, ein Tausender, oder ein Zehentausender war; allein bey dem fünften Exempel ad e., wo der Subtrahend lauter Nullen hatte, bis auf den 8ter in der Hunderttausenderzahl, kann ich mich noch nicht recht darein finden, daß ich nur bey der ersten Null rechts sagen durfte: 9 von 10 bleibt 1. und die übrigen Nullen alle nur für 9ner zu halten waren. Hierüber möchte ich eine genügende Antwort haben.

Antw. Es ist oben auf die 7te Frage zur Antwort gegeben worden, daß die Null nur die Stellvertreterin einer geltenden Ziffer seye, wenn sie einer solchen nachstehe. Aus diesem Grunde mußte auch bey dem gegenwärtigen Falle von der Hunderttausenderzahl 8. Eins zu der ersten Null rechts entlehnt werden, was auf die übrigen Nullen nur in soferne Bezug hatte, da sie alle nur, vielmehr jede für sich, als 9. gelten durften.

Die gemachte Probe hierüber giebt dieses Verfahren, von dem nicht abgewichen werden darf, sehr deutlich an die Hand.

35te Frage. Durch diese gemachte Aufklärung kommt mir es jetzt gleichwohl etwas deutlicher vor, wie man mit vorkommenden Nullen bey dem Subtrahendus umzugehen hat; — allein, ich möchte, um meiner Sache recht gewiß zu seyn, doch noch einige Exempel von der Art sehen, daher ich die Frage dahin stelle: Läßt sich dieser Gegenstand nicht noch besser ausführen?

Antw. O ja! — und zwar durch folgende Exempel:

	a.	b.	c.	d.	e.
	900.	8,000.	70,000.	600,000.	5.001,001.
	899.	7,991.	69,989.	598,765.	3.456,789.
	--1.	---9.	---11.	1,235.	1.544,212.
Probe:	900.	8,000.	70,000.	600,000.	5.001,001.

Erläuterung.

Bey dem ersten Exempel ad a. beweist sich's, daß, wenn die Zahl 899. von 900. abgezogen wird, nicht mehr als 1. zum Rest bleiben konnte, daher gesagt werden mußte:

9 von 10 bleibt 1.
9 = 9 hebt sich auf, und
8 = 8 hebt sich ebenfalls auf.

Bey dem Exempel ad b.

1 von 10 bleibt 9.
9 = 9 hebt sich auf.
9 = 9 = = =
7 = 7 = = =

Dieses Verfahren findet bey den nachfolgenden und bey allen auf eine ähnliche Art vorkommenden Exempeln durchaus statt, daher eine umständlichere Erklärung hierüber überflüßig wäre.

Uebrigens kann die Subtraktion auch durch die Addition verrichtet werden. Z. B.

3,710.526,231.
1,876.937,549.
―――――――――――
1,833.588,682.

Erläuterung.

Wenn auch diese Art zu subtrahiren nicht so bekannt, wenigstens nicht so üblich ist; so könnte man ja solche als Probe anwenden, um eine ganze Zahl anzuschreiben, zu ersparen. Man sagt nemlich mit dem ersten Subtraktor 9.

		Rest		
9	und	2	sind 11.	Die mittere Ziffer 2. wird unten angesetzt, und weiter gesagt:
5	=	8	= 13.	
6	=	6	= 12.	
8	=	8	= 16.	
4	=	8	= 12.	
10	=	5	= 15.	
7	=	3	= 10.	
8	=	3	= 11.	
9	=	8	= 17.	
2	=	1	= 3.	

Bemerkung.

Will man sich nun doch genau überzeugen, ob nicht gefehlt worden ist, so darf man nur nach der gewöhnlichen Art die Subtraktion vornehmen, und es muß eine und dieselbe Zahl im entsprechenden Falle zum Rest herauskommen.

Besondere Belehrung.

Der Subtraktor bey diesem Exempel heißt:

1,876.937,549.

Ich muß nun bey der Einheit 9. eine Ziffer in Gedanken suchen, die mir mit deren Verbindung die Ziffer 1. im Subtrahend abwirft, und folglich sagen: wie oben 9. und 2. ist 11. Davon wird 2. unten angesetzt, und die Zehnerzahl von 11. zu der Zehnerzahl 4. des Subtraktors mit eingerechnet; daher konnte man sagen: 5 und 8 ist 13. Weiter: 6 und 6 ist 12. 8 und 8 ist 16. 4 und 8 ist 12. 10 und 5 ist 15. 7 und 3 ist 10. 8 und 3 ist 11. 9 und 8 ist 17. 2 und 1 ist 3.; so zwar, daß immer die hier bemerkte Zehnerzahl von 16. 12. 15. ꝛc. zu der nächsten Ziffer links im Subtraktor mit einzurechnen war.

Die Subtraktion auf diese Art zu verrichten, ist gleichsam eine fernere Uebung zur Addition, die ihr Gutes unbemerkbar mit sich bringen wird; — denn eben dadurch wird man mit dem Grundverhältniß der neun Zahlzeichen von 1. bis 18. immer bekannter, worauf man besondere Rücksicht zu nehmen hat.

36te Frage. Wäre es wohl nicht auch rathsam, wenn z. B. ein Versuch damit gemacht werden würde, durch die Subtraktion mit der Zahlensprache, auf das Alphabet bezüglich, gewisse Namen herauszubringen, welcher Versuch zur fernern Uebung dieser Spezies sehr zweckdienlich seyn dürfte?

Antw. Warum denn nicht, das kann nur so leicht auf folgende Art geschehen, und zwar: Durch die allerhöchsten Namen

A.

Seiner Majestät des allergnädigsten Königs und Herrn:

Ludwig, Karl, August.

Nach dem Alphabet.

406610235.
294567938.
112042297.
L U D W I G

4000000.
2988289.
1011711.
K A R L

6000100078.
4792898259.
1207201819.
A U G U S T.

B.

Die allerhöchsten Namen Ihro Majestät der allergnädigsten Königin und Frau:

Therese, Charlotte, Louise, Friederike, Amalie.

6776531971.
4791356786.
1985175185.
T HE R E S E

8000000000000.
4188288858080 5.
3811711141919 5.
CHA R L O T T E

3968110400.
2853901215.
1114200185.
L O U I S E

7428338230970.
1248793051865.
6179545179105.
F R I E D E R I K E

40000000.
28788805.
11211195.
A M A L I E.

C.

Den höchsten Namen Seiner königlichen Hoheit des Kronprinzen von Bayern:

M a x i m i l i a n.

651000201001897.
529761071882784.
121239129119113.
M A X I M I L I A N.

D.

Die höchsten Namen Ihro königlichen Hoheit der Prinzessin von Bayern:

Mathilde, Karoline, Wilhelmine, Charlotte.

108547249015.
964273578 70.
1211989114 5.
M A T H I L DE

71945127566 20.
61827986374 85.
101171411913 5.
K A R O L I N E

4222222222222 22.
1931037110930 87.
2201185111291 35.
W I L HE L M I N E

96476218362980.
58359106943785.
3811711141919 5.
C HA R L O T T E.

E.

Die höchsten Namen Seiner königlichen Hoheit des Prinzen von Bayern:

Otto, Friederich, Ludwig.

78930593.
64738679.
14191914.
O T T O

1350750823425.
732796305487.
6179545179 38.
F R IEDE R I CH

596027062.
483984765.
112042297.
L U D W IG.

F.

Die höchsten Namen Seiner königlichen Hoheit des Prinzen von Bayern:

Luitpold, Carl, Joseph, Wilhelm, Ludwig.

59012717894541.
47803526380427.
1120919151411 4.
L U I T P O LD

1175208.
863497.
311711.
C A R L

1400459007.
486273849.
914185158.
J O S E P H

82846815895.
59934964783.
2291185111 2.
W I L HE L M

221111111.
109068814.
112042297.
L UD W IG.

G.

Die höchsten Namen Ihro königlichen Hoheit der Prinzessin von Bayern:

Adelgunde, Auguste, Charlotte, Elisabethe, Amalie, Sophie, Marie, Louise.

3333333333333.	44444444444.	5555555555555.
1882161319 88.	32372426249.	1743844413636 0.
14511720134 5.	12072018195.	381171114 19195.
Adel g u n de	A u g u s te	Cha r l o t t e

6666666666666.	77777777.	888888888.
1547485414681.	66566582.	707472993.
5119181251985.	1121 1195.	181415895.
E l i s abe t he	A m a l i e	S o p hie

9999999.	9000000000.
8788204.	7885790815.
1211795.	1114200185.
M a r ie	L o u i s e.

H.

Die höchsten Namen Ihro königlichen Hoheit der Prinzessin von Bayern:

Hildegard, Louise, Charlotte, Therese, Friederike.

99438450143.	7501510658.	49885356801627.
10323878969.	6387301473.	11768245382432.
8911457117 4.	1114209185.	3811711141919 5.
Hi l degа r d	L o u i s e	Cha r l o t te

7350569459.	8037406117317.
5365394274.	1857860938212.
1985175185.	6179545179105.
T he r e s e	F r iede r i k e.

I.

Den höchsten Namen Ihro königlichen Hoheit der Prinzessin von Bayern:

A l e x a n d r a.

6666666666666.
5551435532495.
―――――――――――
1115231134171.
A L E X A N D R A.

K.

Die höchsten Namen Ihro königlichen Hoheit der Prinzessin von Bayern, verwittibte Frau Herzogin von Leuchtenberg und Fürstin von Eichstädt:

Auguste, Amalie.

61010101010.
48938082815.
―――――――――――
12072018195.
A U G U S T E

52020202.
40809007.
――――――――
11211195.
A M A L I E.

L.

Die allerhöchsten Namen der königlichen Prinzessin von Bayern, Ihro k. k. Majestät der vermählten Kaiserin von Oesterreich, Königin von Ungarn und Böhmen rc.:

Charlotte, Auguste.

73030303030303.
34913191611108.
――――――――――――――
38117111419195.
C H A R L O T T E

84040404040.
71968385845.
―――――――――――
12072018195.
A U G U S T E.

M.

Die höchsten Namen Seiner königl. Hoheit des Prinzen von Bayern:

Carl, Theodor.

950505.
638794.
――――――
311711.
C A R L

60606060606.
40754619189.
―――――――――――
19851441417.
T H E O D O R.

N.

Die höchsten Namen Ihro königlichen Hoheit der Prinzessin von Bayern, vermählte Kronprinzessin von Preußen:

Elisabethe, Ludovike.

7070707070707.
1951525818722.
5119181251985.
E L I S ABE T HE

9808080808080.
8687666588975.
1120414219105.
L U D O V I K E.

O.

Die höchsten Namen Ihro königlichen Hoheit der Prinzessin von Bayern, vermählte Prinzessin von Sachsen:

Amalie, Auguste.

49090909.
37879714.
11211195.
A M A L I E

908070605o4.
78735042309.
120720l8195.
A U G U S T E.

P.

Die höchsten Namen Ihro königlichen Hoheit der Prinzessin von Bayern, vermählte Erzherzogin von Oesterreich ꝛc.:

Friederike, Sophie, Dorothee.

8000900070006.
1821354890901.
6179545179105.
F R IEDE R I K E

987654321.
806238426.
181415895.
S O P HIE

730987654321.
316816234466.
414171419855.
D O R O T HEE.

Q.

Die höchsten Namen Ihro königlichen Hoheit der Prinzessin von Bayern:

Marie, Anne, Leopoldine, Ludovike, Wilhelmine.

```
 6464646.         575757.        53535353535353353.
 5252851.         462622.        42021202123886218.
 --------         -------        ------------------
 1211795.         113135.        11514151411 49135.
 M A R I E        A N N E        L E O P O L DI N E

    80000800000800.              807060504030201.
    68796657816 95.              57794199290106 6.
    ---------------              ----------------
    11204142191 05.              22911851112 9135.
    L U D O V I K E              W I L HE L M I N E.
```

R.

Die allerhöchsten Namen Ihro Majestät der allergnädigsten Königin und Frau, als Wittwe:

Friederike, Wilhelmine, Karoline.

```
   7675747372717.              123456789876 5432.
   1496202193612.              100544938763 6297.
   --------------              ------------------
   6179545179105.              229118511129135.
   F R IEDE R I K E            W I L HE L M I N E

                 9000050000300.
                 7988335881165.
                 --------------
                 1011714119135.
                 K A R O L I N E.
```

Bemerkung.

Durch die Berechnungen dieser vorstehenden Subtraktions-Exempel von Lit. A. bis R. einschlüßig, vermög welchen das allerhöchst königliche Haus mit dem gegenwärtig lebenden Stammbaume dargestellt ist, glaube ich die Aufmerksamkeit der Jugend besonders in Anspruch genommen zu haben, wenn z. B. ein Knabe oder ein Mädchen dessen eigenen, ihrer Eltern, und so auch die Namen ihrer Verwandten auf eine

ähnliche Weise berechnet wissen wollten, daß sie dadurch in der Subtraktion eine Fertigkeit erlangen könnten, die zu allen übrigen Rechnungsarten sehr nützlich wäre.

Es muß, meines Erachtens, doch die Wißbegierde bey denselben entstehen, — wie kann ich z. B. meinen Namen, er soll Jakob heißen, auf diese Art herausbringen? — Hierauf folgt die Antwort: Man schreibt sich das ganze A B C auf ein Quartblatt, fängt bey dem ersten Buchstaben A mit 1. an, unter B setzt man 2., unter C 3. u. s. f.; dann kommt zu dem Namen Jakob die Zahl

9 1 1 0 1 4 2.
J a k o b   heraus.

Nicht wahr?

Gelingt ihm nur ein Exempel hievon, so erweckt es Freude in ihm, es muntert ihn auf, er probirt mehrere, — die Geläufigkeit im Subtrahiren giebt sich dann von selbst, und das viel leichter, als durch alle andere Kunstgriffe.

Nun sieht der lernbegierige Knabe oder das Mädchen die obigen 17 Exempel durch, fragt sich selbst, wie bekomme ich in Vergleichung mit diesen Exempeln den Subtrahend und den Subtraktor zu dem Namen Jakob? — Probirt, und sagt:

Subtraktor		Subtrahend.		Rest.
6	von	8	bleibt	2.
2	=	6	=	4.
7	=	8	=	1.
3	=	3	=	0.
4	=	5	=	1.
5	=	6	=	1.
1	=	10	=	9.

10653868.
1543726.
9 1 1 0 1 4 2.
J A K O B.

Oder:

9	von	11	bleibt	2.	b
8	=	12	=	4.	o
1	=	2	=	1.	
4	=	4	=	0.	k
4	=	5	=	1.	
5	=	6	=	1.	a
8	=	17	=	9.	J

17654331.
8544189.
9 1 1 0 1 4 2.
J A K O B.

Besondere Belehrung.

Sowohl die vorausgehenden 17 Exempel, als dieses letztere auf zweierlei Arten hergestellte für den Namen Jakob beweisen, daß die Zahl des Subtrahendus nach Belieben angenommen werden kann, wenn man nur jene Zahl des Unterschiedes von dem gewählten Namen nach dem Alphabet kennt. Z. B. 10.000,000. Subtrahend.

37te Frage. Wie finde ich nun den Subtraktor, da ich weiß, daß der Rest 9.110,142. heißen soll?

Antw. Sehr leicht, ich sage nemlich in Gedanken:

8	von	10	bleibt	2.	b.	
5	=	9	=	4.	o	
8	=	9	=	1.		
9	=	9	=	0.	k	
8	=	9	=	1.		
8	=	9	=	1.	a	
—	=	9	=	9.	J	

Berechnung.

$$\begin{array}{r} 10000000. \\ 889858. \\ \hline 9110142. \end{array}$$

Bemerkung.

In einem solchen Falle kann die Kopfrechnung recht vortheilhaft benützt werden; und es ist nur noch kurz zu erwähnen, daß die Zahlensprache darin bestehe, daß nemlich:

	der	11te	Buchstabe	im	Alphabet	L	
	=	20te	=	=	=	u	
	=	4te	=	=	=	d	
	=	22te	=	=	=	w	
	=	9te	=	=	=	i	
und	=	7te	=	=	=	g	seye.
Ferner:	der	19te	Buchstabe	im	Alphabet	T	
	=	8te	=	=	=	h	
	=	5te	=	=	=	e	
	=	17te	=	=	=	r	
	=	5te	=	=	=	e	
	=	18te	=	=	=	s	
und	=	5te	=	=	=	e	seye 2c.

Nun folgen zum Schluß der Subtraktion noch Uebungs-Beyspiele:

	987654321.	876543219.	765432198.
	123456789.	345678912.	456789123.
Rest			
	3791000561.	4810005600.	5782031097.
	2469534786.	3698087325.	1098500678.
Rest			

	476011000875421.	123456789876543 21.
	123456789876543.	921678904567898 7.
Rest		
	3710159032684.	901001001001000.
	1987643267956.	547892316754389.
Rest		

Belehrung.

Diese Uebungs-Beyspiele dienen nicht nur zur Subtraktion allein, sondern sind auch zugleich eine besondere Uebung zur Addition und zur Numeration.

Zuerst sollte bey jedem Exempel die Subtraktion vorgenommen, und die Rests-Summen untereinander gesetzt werden, wovon eine Total-Summe von

3,836:284,173.605,534.

herauskommen muß.

Zur Probe wären sodann die speziellen Posten von jedem Subtrahendus, so wie die des Subtraktors ebenfalls untereinander zu setzen, wovon erstere eine Zahl von

13,726:418,161.230,422.

und letztere

9,890:133,987.624,888.

zur Haupt-Summe geben werden.

Fünfter Abschnitt.

Von der Multiplikation mit unbenamten Zahlen.

38te Frage. Was heißt Multipliziren?

Antw. Vermehren, oder auch Vervielfältigen, nemlich: eine gegebene Zahl durch eine andere um so vielmal größer machen, als diese Einheiten enthält, und somit eine dritte neue Zahl suchen.

39te Frage. Wie ist das zu verstehen?

Antw. Es soll z. B. die Ziffer 6. mit 5. vermehrt, folglich 5 mal so groß als 6. gemacht werden, das zwar auch durch die Addition geschehen könnte (weil diese Spezies auch vermehrt) wenn die Ziffer 6. fünfmal untereinander gesetzt und zusammenaddirt werden würde; welches aber viel zu umständlich, ja! — bey großen Exempeln zu ermüdend, und am Ende wohl gar nicht ausführbar wäre, nemlich;

6.
6.
6.
6.
6.

oder 5 mal 6 ist 30.

Ferner wollte man die Ziffer 7. mit 9. vervielfältigen, und zwar;

7.
7.
7.
7.
7.
7.
7.
7.
7.

oder 7 mal 9 ist 63.

In dieser Hinsicht könnte man die Multiplikation für eine verkürzte Addition gelten lassen; — allein, man hat andere Hilfsmittel hiezu ausfindig gemacht, durch welche die Multiplikation für sich als eigene Spezies bestehen kann, und zur Er-

leichterung derselben das sogenannte Einmal=Eins gewählt, welches in folgender Tafel zu finden ist, und zwar:

Das ordinäre Einmal=Eins.

1	mal	1	ist	1
1	=	2	=	2
1	=	3	=	3
1	=	4	=	4
1	=	5	=	5
1	=	6	=	6
1	=	7	=	7
1	=	8	=	8
1	=	9	=	9
1	=	10	=	10
2	mal	2	ist	4
2	=	3	=	6
2	=	4	=	8
2	=	5	=	10
2	=	6	=	12
2	=	7	=	14
2	=	8	=	16
2	=	9	=	18
2	=	10	=	20
3	mal	3	ist	9
3	=	4	=	12
3	=	5	=	15
3	=	6	=	18
3	=	7	=	21
3	=	8	=	24
3	=	9	=	27
3	=	10	=	30
4	mal	4	ist	16
4	=	5	=	20
4	=	6	=	24
4	=	7	=	28
4	=	8	=	32
4	=	9	=	36
4	=	10	=	40
5	mal	5	ist	25
5	=	6	=	30
5	=	7	=	35
5	=	8	=	40
5	=	9	=	45
5	=	10	=	50
6	mal	6	ist	36
6	=	7	=	42
6	=	8	=	48
6	=	9	=	54
6	=	10	=	60
7	mal	7	ist	49
7	=	8	=	56
7	=	9	=	63
7	=	10	=	70
8	mal	8	ist	64
8	=	9	=	72
8	=	10	=	80
9	mal	9	ist	81
9	=	10	=	90
10	mal	10	ist	100

Bemerkungen.

Zu diesem Einmal=Eins hat man die zwei Wörter

mal und ist,

um sich dabey leichter auszudrücken, nothwendig, dadurch sagt man gleichsam, daß die zweite Ziffer um so vielmal vermehrt werden soll, als die erste ihrer Größe nach Einheiten in sich begreift. Z. B.

2 mal 7 ist 14.

Wenn ich nun 7. zweimal nehme, so bekomme ich dadurch die Zahl 14.

Dieses Einmal=Eins ist, so zu sagen, der Schlüssel zu der Multiplikation, nach welchem man solche zu verrichten hat, und derselbe ganz auswendig erlernt werden muß, damit man jedes summirende, oder durch die Vervielfältigung hervorgehende größere Glied gleich kenne, und augenblicklich wisse, daß

7 mal 9 die Zahl 63.

so wie auch

5 mal 8 die Zahl 40.

ausmache u. s. w.; auch umgekehrt

8 mal 5 die Zahl 40 ist.

Damit aber dieses nemliche Einmal=Eins auch in einem verkürzten Vortrage kennen gelernt werde, will ich nachstehende tabellarische Form hiezu wiedmen, nemlich:

9

Das verkürzte Einmal = Eins.

3 mal

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3		9	12	15	18	21	24	27	30
4			16	20	24	28	32	36	40
5				25	30	35	40	45	50
6					36	42	48	54	60
7						49	56	63	70
8							64	72	80
9								81	90
10									100

ist 27.

17

Das große Einmal = Eins.

13 mal

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
3		9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
4			16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
5				25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
6					36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
7						49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
8							64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
9								81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180
10									100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
11										121	132	143	154	165	176	187	198	209	220
12											144	156	168	180	192	204	216	228	240
13												169	182	195	208	221	234	247	260
14													196	210	224	238	252	266	280
15														225	240	255	270	285	300
16															256	272	288	304	320
17																289	306	323	340
18																	324	342	360
19																		361	380
20																			400

ist 221.

Erläuterung.

Ob man von dem verkürzten oder von dem großen Einmal-Eins Gebrauch machen, oder wohl gar auswendig lernen will, ist immer gleichviel.

Die Zahlen links herunter werden zuerst ausgesprochen, und z. B. gesagt:

3 mal 9. Diese 9. suche ich oben quer herüber Rechts, und fahre mit dem Finger gerade herunter, so werde ich der Ziffer 3. gegenüber, ebenfalls rechts, die Zahl 27. finden. Ferner:
13 mal 17. ist gegenüber unter 17. die Zahl 221. Weiter:
17 mal 18. giebt ein Produkt von 306.

40te Frage. Da ich nun in diesem Einmal-Eins, welches dreimal vorliegt, den sichersten Anhaltspunkt zu finden vermuthe, nach welchem die Spezies der Multiplikation, oder die Vervielfältigung ausgeübt werden kann; so möchte ich ferner auch die eigentliche Verfahrungs-Art derselben, jedoch gründlich kennen lernen, und vorzüglich wissen, was für Benennungen bey den hiezu anzuwendenden Zahlen hierin statt finden?

Antw. Dreyerlei, und zwar:

a. Diejenige Zahl, welche multiplizirt oder vermehrt werden soll, nennt man Multiplikandus.

b. Hingegen jene Zahl, mit welcher multiplizirt wird, Multiplikator (auch Vervielfältiger.)

Diese beide Zahlen nennt man auch Faktoren, und

c. die durch die geschehene Multiplikation herauskommende Zahl nennt man das Produkt, oder die vermehrte Zahl (oder das Mehrfache.)

41te Frage. Was ist noch ferner hiebey zu beobachten?

Antw. Daß die Zahl des Multiplikandus oben, und die des Multiplikators unter erstere zu setzen ist; sodann wird unter diese Zahlen ein Querstrich gemacht, unter denselben aber die Zahl des Produkts gesetzt. Z. B.

4,321.	Multiplikandus.
2.	Multiplikator.
8,642.	Produkt.

Erläuterung.

Man sieht durch dieses einfache Exempel sehr deutlich, daß die gegebene Zahl 4,321., durch 2. multiplizirt, gerade noch so viel zum Produkt abgeworfen hat; folglich um die nemliche Zahl mehr; dabey hat es nach der Sprechform geheißen:

2 mal	1	ist	2.	}	Produkt.
2 =	2	=	4.		
2 =	3	=	6.		8,642.
2 =	4	=	8.		

42te Frage. Ich muß sagen, daß ich dieses Verfahren der Multiplikation mit der Ziffer 2. gleich kurzweg begriffen habe; es mich aber jetzt um so mehr neugierig machte, daß ich nemlich wissen möchte, ob denn bey allen übrigen Ziffern von 2. bis 9., oder wenn denselben eine Null angehängt werden sollte, ein und dasselbe Verfahren berücksichtiget werden müsse?

Antw. Hierüber geben folgende Multiplikationen den geeigneten und zuverläßigsten Aufschluß. Z. B.

a.		b.	c.
987.654,321.	Multiplikandus.	987.654,321.	987.654,321.
2.	Multiplikator.	3.	4.
1,975.308,642.	Produkt.	2,962.962,963.	3,950.617,284.

d.	e.	f.
987.654,321.	987.654,321.	987.654,321.
5.	6.	7.
4,938.271,605.	5,925.925,926.	6,913.580,247.

g.	h.	i.
987.654,321.	987.654,321.	987.654,321.
8.	9.	10.
7,901.234,568.	8,888.888,889.	9,876.543,210.

Erläuterung.

Diese neun Exempel, in welchen, wie man augenscheinlich wahrnehmen kann, das ganze Einmal = Eins enthalten ist, werden zu den Anfangsgründen hinreichend seyn, da in denselben alle nur möglich denkenden Fälle, wo der Multiplikator nur mit

einer ein= oder mehrfachen Ziffer erscheint, vorkommen; indessen ist hier hauptsächlich zu erläutern nothwendig, daß da, wo durch die Multiplikation sich eine Zehnerzahl zeigt, die Einheit derselben, unter welche Ordnung, Unterabtheilung oder Hauptklasse sie auch gehören mag, angesetzt, und die Zehnerzahl selbst einstweilen im Sinne zu behalten seye, bis sie zu der nächstfolgenden multiplizirten Zahl miteingerechnet werden kann; daher bey dem Exempel ad a. gesagt werdeu mußte:

2	mal	1	ist	2.
2	=	2	=	4.
2	=	3	=	6.
2	=	4	=	8.
2	=	5	=	10.

Hier trat der erste Fall ein, wo die Null unter die Zehentausender-Zahl gesetzt, und die Zehnerzahl 1. zu der nächsten Hunderttausender-Zahl einzuzählen war. Weiter:

2	mal	6	ist	12	und	1	ist	13.
2	=	7	=	14	=	1	=	15.
2	=	8	=	16	=	1	=	17.
2	=	9	=	18	=	1	=	19.

Diese letzte Zahl mit 19. mußte zum Schluß dieser Multiplikation ganz angesetzt werden.

Bey dem Exempel ad h. sagt man ferner:

								Zehnerzahlen. Einheiten.
9	mal	1	ist	9.				
9	=	2	=	18.				
9	=	3	=	27	und	1	ist	28.
9	=	4	=	36	=	2	=	38.
9	=	5	=	45	=	3	=	48.
9	=	6	=	54	=	4	=	58.
9	=	7	=	63	=	5	=	68.
9	=	8	=	72	=	6	=	78.
9	=	9	=	81	=	7	=	88.

Diese Einheiten werden jedesmal mit 8. gleich angesetzt, und die Zehnerzahlen von 1. bis 7., wie oben gedacht, zu der darauf vermehrten Zahl genommen.

Bey dem Exempel ad i. sagt man ferner; vielmehr hat es bey demselben eine ganz andere Beschaffenheit, weil der Multiplikator desselben 10. heißt, also in der Einheit eine Null, zur Zehnerzahl aber 1. hat, und eine runde Zahl ist, die Ziffer 1. hingegen bey der Multiplikation weder vermehrt noch vermindert, so kann eben dieses Exempel auf folgende Art auch

kürzer gemacht werden, und zwar: Man setzt dem Multiplikand nur rechts eine Null bey, so ist das Produkt fertig. Z. B.

9,876.543,210.

Bemerkung.

So viele Nullen bey dem Multiplikator am Ende vorkommen, werden sie alle über den Multiplikand hinausgesetzt. Z. B. die Zahl 3,758 wäre mit 7,000. zu multipliziren:

	3,758.
	7,000.
	26.306,000.

43te Frage. Wie läßt sich die Probe über dergleichen Exempel machen?

Antw. Der Regel nach sollte dieselbe durch die Division gemacht werden; allein, weil von dieser Spezies noch gar keine Erwähnung war, so wollen wir gleichwohl die Probe durch die Subtraktion machen. Z. B.

Wenn ich daher von dem Exempel ad b. das Produkt von dem Produkt des Exempels ad g. abziehe, so erhalte ich hiedurch zur Probe jenes Produkt von dem Exempel ad d., nemlich:

Probe ad g.	.	7,901.234,568.	Subtrahend.
" b.	.	2,962.962,963.	Subtraktor.
" d.	.	4,938.271,605.	Rest.

Es ist auch ganz richtig, weil ich gerade so viel, als 3. von 8. abziehe, wovon mir 5. zum Rest bleiben muß.

Wenn ich aber ad d. von ad i. abziehe, was kommt hiedurch für ein Produkt zur Probe? — Gerade so viel, als wenn ich 5. von 10. abziehe.

Nun will ich ad c. von ad f. in Abzug bringen, wie wird das Produkt dieser Probe aussehen? — Wie wenn ich 4. von 7. sage, bleibt 3.; daher muß das Produkt, wo mit 3. multiplizirt wurde, aufgesucht werden.

Ferner ad e. von ad h. — Wie 6. von 9. bleibt 3.

Dann ad a. von ad e. — Wie 2. von 6. bleibt 4.

Ein eigener Versuch hierüber könnte zur Uebung nicht undienlich seyn.

44te Frage. Im Falle, es sollten mehrziffrichte Zahlen bey dem Multiplikator vorkommen, wie wird man sich hierin zu verhalten haben?

Antw. Dann wird zuerst mit der Einheit, nach dieser mit der Zehner-, Hunderter-, Tausender-, Zehentausender- und Hunderttausender-Zahl multiplizirt, und bey jeder Abtheilung um eine Ziffer rückwärts gerückt, am Ende ein Querstrich unter alle diese Zahlen gemacht, sodann zusammenaddirt, und das verlangte Produkt hiedurch hervorgebracht. Z. B.

a.	b.	c.
731,205.	731,205.	731,205.
32.	432.	5,432.
1462410.	1462410.	1462410.
2193615.	2193615.	2193615.
23398560.	2924820.	2924820.
	315880560.	3656025.
		3971905560.

Erläuterung.

Bey dem ersten Exempel ad a. mußte gesagt werden:

2 mal 5 ist 10. und setzt diese Zahl 10. auch gleich ganz an, weil die Zehnerzahl im Multiplikand eine Null ist, dann weiter fortgefahren:

2 = 2 = 4. 2 = 1 = 2. 2 = 3 = 6. 2 = 7 = 14.	Erstes Produkt durch die Einheit 2. 1.462,410. Und nun mit der Zehnerzahl 3.:
3 = 5 = 15. 3 = 2 = 6. 3 = 1 = 3. 3 = 3 = 9. 3 = 7 = 21.	Zu ganz angesetzt. Zweytes Produkt durch die Zehnerzahl. 2.193,615. Ganz angesetzt, und das Total-Produkt heißt nun:

23.398,560.

Besondere Belehrung.

Bey dieser Gelegenheit will ich auch auf die Verkürzung im Multipliziren aufmerksam machen; indem die Zahl des Mul-

tiplikators ad a., nemlich 32., von der Art ist, daß sie in zwey Faktoren aufgelöst werden kann, und man sie deßwegen eine Verhältnißzahl zu nennen pflegt. Z. B.

32. oder 4 mal 8. ist 32.

Berechnung.

32. Verhältnißzahl.

731,205.	
5.849,640.	× 8.
23.398,560.	× 4.

Erläuterung.

Mit dem ersten Faktor 8. wurde der Multiplikand 731,205. multiplizirt, das herausgekommene Produkt 5.849,640. sodann mit dem zweyten Faktor 4. ebenfalls multiplizirt, dadurch aber das endliche Produkt mit

23.398,560.

wie oben herausgebracht, durch welche Abkürzung jedoch nicht nur eine ganze Reihe Ziffern erspart wurde, sondern auch die Addition erübriget worden ist.

Auch bey dem Exempel ad b. läßt sich eine ähnliche Verkürzung, unbeschadet der Multiplikation, anwenden, weil in dem Multiplikator drey einfache Faktoren in der Zahl 432. enthalten sind, und zwar:

432. oder 8 mal 6 ist 48. und
9 " 48 " 432.

Berechnung.

432.

731,205.	
5 849,640.	× 8.
35.097,840.	× 6.
315.880,560.	× 9.

oder 6, 8, 9 oder 9, 8, 6 — Weil immer eins und dasselbe Verhältniß obwaltet.

Bemerkung.

Aus welcher Ursache diese drey Faktoren entstanden sind, kann erst später erklärt werden, wenn die nachfolgende Spezies der Division abgehandelt seyn wird; indem ohnedies bey dem

Vortrage mit benamten Zahlen mehr dergleichen Vortheile in Hinsicht der fraglichen Abkürzungen vorkommen werden.

Bey dem Exempel ad c. hingegen, bey welchem eine solche Abkürzung nicht statt findet, hat es bey der gewöhnlichen Regel sein Verbleiben, daß nemlich:

a.	zuerst mit der Einheit	. . . .	2.	
b.	dann = = Zehnerzahl	. . .	3.	
c.	= = = Hunderterzahl	. .	4.	und
d.	= = = Tausenderzahl	. .	5.	

multiplizirt werden muß.

45te Frage. Wenn bey einem großen Multiplikator in der Mitte der Zahl mehrere Nullen vorkommen sollten, wie hat man sich hierin zu benehmen?

Antw. Daß man diejenige Stellen, wo sich beym Multiplikator Nullen vorfinden, mit Stillschweigen umgehe, und verfahre hiebey, wie folgt:

a.

```
3785641297.
     50038.
---------------
 30285130376.
11356923891.
18928206485.
---------------
189425919219286.
```

b.

```
      67054003218765.
            40320009.
-----------------------
       603486028968885.
    134108006437530.
   201162009656295.
  268216012875060.
-----------------------
2703618013266337688885.
```

Erläuterung.

Bey dem Exempel ad a. kommen in der Eintausender und Einhunderterzahl Nullen vor. Sobald nun mit der Zehentausenderzahl, d. i. mit 5. multiplizirt werden mußte, war die Einhunderter= und Eintausender = Zahl, wie oben gesagt, mit Stillschweigen zu umgehen, und mußte das Resultat durch 5 mal 7. ist 35. mit der Einheit 5. unter die Zehentausenderzahl gesetzt werden, so zwar, daß diese Ziffer 5. gerade unter den Multiplikator 5. zu stehen kam.

Ein gleiches Verfahren war auch bey dem Exempel ad b. zu berücksichtigen.

Nun folgen Uebungs-Beyspiele.

a.	b.
6,107.080,905. 304,078.	5,090.807,016. 870,403.
c.	**d.**
910,076.350,004. 7.008,962.	400,053.670,019. 2.698,007.
e.	**f.**
2:451,608.917,386. 1.234,567.	825,376.954,109. 7.638,254.
g.	**h.**
725,489.124,378. 9.867,534.	912,054.367,815. 8.210,093.

Bemerkung.

Diese vorgetragene Beyspiele, die für die geübtern Schüler im Rechnen zu Hausaufgaben dienen dürften, geben nachstehende Produkte an die Hand, deren Total-Summe jedoch im Allgemeinen selbst aufgesucht werden wolle, und zwar:

ad	a.	1,857:028,947.430,590.
=	b.	4,431:053,699.147,448.
=	c.	6;378,690:554,276.735,848.
=	d.	1;079,347:602,086.952,133.
=	e.	3;026,675:466,310.481,862.
=	f.	6;304,438:821,230.885,686.
=	g.	7;158,788:601,430.143,852.
=	h.	7;488,051:180,817.356,795.

Sechster Abschnitt.

Von der Division mit unbenamten Zahlen,

und zwar:

nach meiner ganz eigenen verkürzten Art.

46te Frage. Was heißt Dividiren?

Antw. Theilen, d. i. in einer größern Zahl so viel gleiche Theile aufsuchen, als so vielmal eine kleinere Zahl in derselben begriffen ist.

47te Frage. Wie viel Zahlen sind eigentlich bey einer Division nothwendig?

Antw. Drey.

48te Frage. Wie nennt man diese drey Zahlen?

Antw. Die Erste: Divisor.
" Zweite: Dividendus.
" Dritte: Quotient.

49te Frage. Wie ist

a. deren Ansatz zu machen?
b. Welche Abtheilung findet dabey statt? — und
c. Wo wird mit Dividiren angefangen?

Antw. ad a. Zuerst mit zwey Zahlen. Z. B.

Divisor.	Dividend.
3.	24.

Berechnung.

	Divisor.	Dividend.	Quotient.
Nach der bisher angenommenen Sprechform.	3 in	24.	geht 8 mal.

8 mal 3. ist 24. von 24. hebt sich auf, daher zwey Querstrich unter den ganz aufgelösten Dividend 24. zu machen waren.

ad b. Die zu beobachtende Abtheilung besteht darin: daß zwischen dem Divisor und dem Quozient zwei horizontale Striche gemacht werden, in dessen Mitte der Dividend zu setzen kommt; und

ad c. von der linken gegen die rechte Hand angefangen wird.

50te Frage. Was giebt es denn sonst noch Erhebliches bey Anwendung dieser Spezies, was nicht außer Acht gelassen werden darf?

Antw. Daß man den Divisor mit dem Dividend in gehörige Vergleichung ziehe, das will so viel sagen: Wenn ich die vor mir liegende Größe des Divisors kenne, sie bestehe z. B. in der Ziffer 2., der Dividend hingegen in der Zahl 246., so sehe ich mich vor Allem nur um diejenige Zahl um, in die ich mit 2. zu dividiren Willens bin, ohne auf die nachfolgenden Ziffern mein Augenmerk zu richten; wenn dieses geschehen, rücke ich um eine Ziffer vorwärts, und habe also eine neue Zahl vor mir, von der ich die gleich treffenden Theile des Divisors aushebe, die zurückgelassenen Ziffern aber, wo nichts mehr zu gelten haben, bezeichne ich mit einem kleinen Querstrich. Auch ist ferner die Multiplikation, so wie die darauffolgende Subtraktion und Addition in Anspruch zu nehmen.

Demnach sage ich:

2. | 246. | 123.
   ‾‾‾

und erhalte den Beweiß, daß 2. in 246. gerade 123 mal enthalten seye.

51te Frage. Auf welche Art kann denn bey der Division, zur Ueberzeugung der richtig geschehenen Berechnung, die Probe gemacht werden?

Antw. Auf zweierlei Arten, und zwar:

a. Der Regel nach durch die Multiplikation des Divisors in den Quotienten.

b. Wenn ich mit dem Quotienten in den Dividend dividire, muß der Divisor zum Vorschein kommen. Z. B.

ad a. 2. | 246. | 123.
                 2.
         ―――――――――
         246. Probe 1.

		Divis.	Divid.	Quot.	
ad b.	2.	246.	123.	246.	2. Probe 2.

Nun folgen mehrere Divisions-Exempel zur geeigneten Berechnung, und als doppelte Probe der Multiplikations-Beyspiele von der 42ten Frage, und zwar:

a. Als 1te Probe durch den vorherigen Multiplikator 2. 3. 4. ꝛc. Dann

b. zur 2ten Probe durch den Quotient in den Dividend.

	ad a.	1te Probe.		
2.	1975308642. 1111	987654321.	1975308642.	2. Probe 2.
	ad b.	„ „		
3.	2962962963. 22111	987654321.	2962962963.	3. „ „
	ad c.	„ „		
4.	3950617284. 332211	987654321.	3950617284.	4. „ „
	ad d.	„ „		
5.	4938271605. 4332211	987654321.	4938271605.	5. „ „
	ad e.	„ „		
6.	5925925926. 5433211	987654321.	5925925926.	6. „ „
	ad f.	„ „		
7.	6913580247. 6543321	987654321.	6913580247.	7. „ „
	ad g.	„ „		
8.	7901234568. 7654321	987654321.	7901234568.	8. „ „
	ad h.	„ „		
9.	8888888889. 7654321	987654321.	8888888889.	9. „ „
	ad i.			
10.	9876543210	Hier liegt die Probe gleich auch vor, nach-		

dem die Null im Dividend gegen jene im Divisor nur abgeschnitten werden durfte, und die Zehnerzahl 1. im Divisor weder vermehrt noch vermindert.

Erläuterung.

Die vorgenommene Division mit vorstehenden neun Exempeln giebt stuffenweise die Abänderungen an die Hand, welche aus den nach und nach erhöhten acht Zahlzeichen, vielmehr aus den erhöhten Divisoren von 2. bis 9. entsprungen sind.

Die natürliche Lage, welche übrigens diese verkürzte Divisions-Manier mit sich führt, wolle aus dem Grunde nicht mißkannt werden, indem durch dieselbe manchesmal eine enorme Vielschreiberei erspart wird; und — wer sollte wohl auf dergleichen nützliche Vortheile nicht bedacht seyn wollen? — Denn es durfte z. B.

bey dem ersten Exempel ad a. nur gesagt werden:

Divisor	Divid.	Quot.	
2	in 19	geht 9 mal,	und dann 9 mal 2 ist 18. von 19 bleibt 1., welche Ziffer 1. unter die Einheit 9. als Rest beym Dividend zu setzen war, und unter die Zehnerzahl 1. ein Querstrich, als das Zeichen, daß die fragliche Ziffer 1. nichts mehr zu gelten habe, gemacht werden mußte. Weiter, um eine Ziffer vorwärts in die Zahl 17.
2	= 17	= 8 =	8 mal 2 ist 16. von 17 bleibt 1. (Rest)
2	= 15	= 7 =	7 = 2 = 14. = 15 = 1.
2	= 13	= 6 =	6 = 2 = 12. = 13 = 1.
2	= 10	= 5 =	5 = 2 = 10. = 10 hebt sich auf, daher unter die Zahl 10. zwei Querstriche gemacht werden mußten. Ferner:

Divisor.		Divid.		Quot.		
2	in	8	geht	4	mal.	4 mal 2 ist 8. von 8 hebt sich auf.
2	„	6	„	3	„	3 „ 2 „ 6. „ 6 „ „ „
2	„	4	„	2	„	2 „ 2 „ 4. „ 4 „ „ „
2	„	2	„	1	„	1 „ 2 „ 2. „ 2 „ „ „

Bey dem Exempel ad h. hingegen hat es geheißen:

							Rest.
9	„	88	„	9	„	9 mal 9 ist 81. von 88 bleibt	7.
9	„	78	„	8	„	8 „ 9 „ 72. „ 78 „	6.
9	„	68	„	7	„	7 „ 9 „ 63. „ 68 „	5.
9	„	58	„	6	„	6 „ 9 „ 54. „ 58 „	4.
9	„	48	„	5	„	5 „ 9 „ 45. „ 48 „	3.
9	„	38	„	4	„	4 „ 9 „ 36. „ 38 „	2.
9	„	28	„	3	„	3 „ 9 „ 27. „ 28 „	1.
9	„	18	„	2	„	2 „ 9 „ 18. „ 18 „	—
9	„	9	„	1	„	1 „ 9 „ 9. „ 9 „	—

52te Frage. Da ich nun die Division, wo zum Divisor nur eine Ziffer angenommen worden ist, durch alle Zahlzeichen kennen gelernt habe; weil mir durch die Zergliederung der vorangehenden Division mit der Ziffer 9. nicht nur die Zahlen des Dividends von 88. angefangen, sondern auch die des Quotienten, und endlich die Zahl der verbliebenen Reste deutlich in der gehörigen Ordnung von oben bis unten vor Augen gelegt worden sind; so möchte ich auch jetzt gerne wissen, wie ferner verfahren wird, wenn der Divisor

a. aus einer mehrziffrichten Zahl besteht?

b. Wenn demselben am Ende mehrere Nullen angehängt werden? — und

c. wenn der Divisor in dem Dividend nicht aufgeht, wie man diese verbliebene Zahl zu benennen pflegt?

Antw. ad α. Bey einer mehrziffrichten Zahl wird mit dem ausgehobenen einfachen Quotienten zuerst mit der Einheit des Divisors multiplizirt, und die geeignete Subtraktion vorgenommen; sodann mit der Hunderter- und Tausenderzahl ꝛc. eben so fortgefahren.

ad b. Kommen bey dem Divisor am Ende Nullen vor, so werden bey dem Dividend eben so viele Ziffern, in Ermanglung der Nullen, am Ende durch einen krummen Strich abgesöndert, und die verbliebene Zahl zum Rest erkannt.

ad c. Rest, Unterschied oder Differenz. Z. B.

a.

```
12. | 445260. | 37105.  | 445260. | 12.  Probe 2.
    |  81     |    12.  |  7421   |
              -------
               74210.
              37105.
             -------
              445260.  Probe 1.
```

b.

```
21. | 779226. | 37106.  | 779226. | 21.  Probe 2.
    | 1421    |    21.  |  3710   |
              -------
               37106.
              74212.
             -------
              779226.  Probe 1.
```

c.

```
123. | 4564161. | 37107.  | 4564161. | 123.  Probe 2.
     |  8738    |   123.  |  85342   |
     |   1      | -------  |  1113    |
                 111321.
                74214.
               37107.
              --------
               4564161.  Probe 1.
```

d.

```
321. | 11911347. | 37107.  | 11911347. | 321.  Probe 2.
     |  22842    |   321.  |   77920   |
     |    32     | -------  |    371    |
                  37107.
                 74214.
                111321.
               ---------
                11911347.  Probe 1.
```

e.

```
4503. | 3017253162. | 670054.     | 3017253162. | 4503.
      |  31544801   |   4503.     |  3370371    |        Probe 2.
      |   21          2010162.        2010
                     3350270.
                    2680216.
                    3017253162.  Probe 1.
```

f.

```
6007. | 1191981024. | 198432.     | 1191981024. | 6007.
      |  59125521   |   6007.     |    1389     |        Probe 2.
        506920        1389024.
          2592     1190592.
           11      1191981024.  Probe 1.
```

g.

```
53(000. | 42970545(000. | 810765.
        |   54346       |      53000.
              2           2432295000.
                         4053825.
                         42970545000.  Probe 1.
```

```
810765. | 42970545000. | 53000.  Probe 2.
        |   243229     |
```

h.

```
709(00. | 2329748478(93. | 3285964 223/70900.
        | 202923332      |
            602858         70900.
              4642
                             70900.
                          2957367893.
                         23001748.
                         23297484789З.  Probe 1.
```

```
3285964 223/70900 | 2329748478 93. | 70900.  Probe 2.
                  |   295736 2     |
                                 70900.
```

Bemerkung.

Weil hier ein Rest von $\frac{223}{70900}$ verblieben ist, dieser Rest aber bey der geschehenen Multiplikation, Probe 1., miteingezogen werden mußte; so glaubte ich solches deshalb bemerken zu müssen, damit man sich in einem ähnlich vorkommenden Falle leicht selbst helfen könne.

Welche schöne Gelegenheit giebt mir die 2te Probe an die Hand, bey der ich mit dem Quotienten von dem Divisions = Exempel, nemlich mit 3.285,964., ohne Rücksicht auf die verbliebenen Bruchtheile mit $\frac{293}{70900}$ zu nehmen, in den vorherigen Dividend dividiren konnte, wovon mir ein gleichlautender Rest per $\frac{293}{70900}$ übergeblieben ist, und der Divisor mit 70,900. als Quotient herauskam; um den klaren Beweis damit abgeben zu können, daß die Divisions = Probe selbst so verläßig, als jene durch die Multiplikation seye, und für ein gegenseitiges bewährtes Hilfsmittel in vorkommenden Fehlern, dieselbe aufzusuchen, angenommen werden darf.

Noch ein Exempel von der nemlichen Art:

```
                              i.

3254. | 91007652. | 27967 3034/3254. | 91007652. | 3254.  Probe 2.
      | 25929014  |                  | 7106204   |
         314183                        151393
          2250         3254.            1140
            23                             3
        ⏟                             ⏟
        3254.     ___________         3254.   Rest wie vor.
                   114902.
                  139835.
                  55934.
                 83901.
               _______________
               91007652.  Probe 1.
```

Erläuterung.

Nur über dieses letzte Exempel ad i. will ich allein eine ausführliche Aufklärung abgeben, wornach man sich auch bey denen, demselben vorgehenden Exempeln, benehmen wolle, und zwar:

Mit 3,254. mußte in 9,100. zuerst dividirt, und gesagt werden, es seye der Divisor in dem Dividend 2 mal enthalten, folglich

Quot.		Divisor.		Dividend.							
2	mal	4	ist	8.	von	10	bleibt	2.	d. i. . .	2.	Rest 2,592.
2	=	5	=	10.	und	1	ist	11.	von 20	bleibt 9.	
2	=	2	=	4.	=	2	=	6.	= 11	= 5.	
2	=	3	=	6.	=	1	=	7.	= 9	= 2.	

Die neue Zahl im Dividend um eine Ziffer vorwärts heißt nun 25,927., in diese geht der Divisor 7 mal.

Quot. Divisor. Dividend.	
7 mal 4 ist 28. von 37 bleibt 9. d. i. . . 9.	Rest 3,149.
7 = 5 = 35. und 3 ist 38. von 42 bleibt 4.	
7 = 2 = 14. = 4 = 18. = 19 = 1.	
7 = 3 = 21. = 1 = 22. = 25 = 3.	

Die neue Zahl mit Vorrückung einer Ziffer heißt 31,496., in dieser ist der Divisor 9 mal enthalten, folglich

9 mal 4 ist 36. von 36 bleibt 0. d. i. . . 0.	Rest 2,210.
9 = 5 = 45. und 3 ist 48. von 49 bleibt 1.	
9 = 2 = 18. = 4 = 22. = 24 = 2.	
9 = 3 = 27. = 2 = 29. = 31 = 2.	

Die neue Zahl heißt 22,105., in dieser ist der Divisor 6 mal enthalten, folglich

6 mal 4 ist 24. von 25 bleibt 1. d. i. . . 1.	Rest 2,581.
6 = 5 = 30. und 2 ist 32. von 40 bleibt 8.	
6 = 2 = 12. = 4 = 16. = 21 = 5.	
6 = 3 = 18. = 2 = 20. = 22 = 2.	

Die neue Zahl heißt 25,812., in diese geht der Divisor 7 mal, folglich

7 mal 4 ist 28. von 32 bleibt 4. d. i. . . 4.	Wirklich verbliebener Rest 3,034.
7 = 5 = 35. und 3 ist 38. von 41 bleibt 3.	
7 = 2 = 14. = 4 = 18. = 18 = 0.	
7 = 3 = 21. = 1 = 22. = 25 = 3.	

Diese Zergliederung zeigt

a. nicht nur jede folgende Zahl des verbliebenen Restes an, sondern

b. es wird durch dieselbe auch das eigentlich dabey beobachtete Verfahren in Hinsicht der Sprechform zu erkennen gegeben; dann

c. wie man sich mit Entlehnen von der Zehnerzahl Links zu verhalten habe.

ad a. Kommen so viele Ziffern, die eine Zahl bilden, jedesmal zum Rest vor, als so viel nach geschehener Multiplikation, Subtraktion und Addition mit dem einfachen Quotienten verblieben sind. Z. B. Der erste Rest heißt 2,592. Hiezu sodann rechts die nächste Ziffer 7. genommen, giebt die neue Zahl 25,927. u. s. f.

ad b. Die Sprechform lautet so: 2 mal 4 ist 8. von 10 bleibt 2. Diese Ziffer 2. wurde als Rest unter die vierte Ziffer im Dividend, vielmehr unter die Null gesetzt; dann

ad c. von 10. die Zehnerzahl 1. zu der nächstfolgenden Multiplikation im Sinne behalten, und mit eingerechnet werden mußte. Dann 2 mal 5. ist 10. und 1. ist 11. von 20. bleibt 9. Hier mußte die Zehnerzahl 2. oder vielmehr 20. entlehnt werden, damit man abziehen konnte. Es können auch Fälle eintreten, daß man 30. 40. 50. 60. 70. 80. und 90. entlehnen muß, je nachdem die in Abzug zu bringende Zahl es erfodert, dann muß aber immer die treffende Zehnerzahl bey der nächsten Multiplikation dazu gerechnet werden.

Nachdem ich nun mit Grund vermuthen darf, es werde diese gemachte Aufklärung vor der Hand hinreichend seyn, um den rechten Begriff zur verkürzten Division durch Uebung erhalten zu können; so will ich auch hier, wie solches bey der Subtraktion mit den allerhöchsten Namen des königlichen Hauses geschehen ist, den nemlichen Versuch anstellen, und folgendes Exempel hiezu gewiedmet haben:

Nach dem Alphabet.

11 20 4 22 9 7.	2224235876748120 68	19 8 5 17 5 18 5.
Ludwig.	1103812903191273 03 } X 9543223620337 62 } X 579839109803 1) A 196289376 22 } M 842392321 } M 580720 2056 95	**Therese.**

Bemerkung.

Wenn Etwas getheilt wird, und es hebt sich durch diese Theilung das Exempel nicht auf; so nennt man das hievon Verbliebene: Rest, Unterschied oder Differenz, was hier augenscheinlich der Fall war.

Die Kombination des zu theilenden Gliedes, nemlich des Dividends, war so beschaffen, daß dessen komplette Auflösung durch den Theiler unmöglich war, und siehe da, es kam ein Unterschied von

12. 1. 23.
oder M A x. der Name des allgemein geliebten Kronprinzen als differirendes Glied hervor.

Ueber diesen besondern glücklichen Gedanken freute ich mich recht sehr, etwas Neues hiedurch aufgefunden zu haben, und legte sofort das Ganze der allerhöchsten Würdigung vor.

Besondere Bemerkung.

Die Spezies der Division, welche, wie bekannt, eine der schwierigsten Rechnungsarten ist, hat in der verkürzten Behandlungsweise besondere und bedeutende Vortheile in sich, die gleichwohl bis zur Stunde noch nie so, wie sie es verdienten, gewürdiget worden sind.

Sollte man nicht glauben, sie hätte längst dem Unterrichte in den Schulen, in welchen so manche Lehr-Methode nach einem vereinfachten System berücksichtiget wird, gewiedmet werden können, und das um so mehr, weil es eine große Erleichterung für die Schulkinder wäre, wenn sie gleich beym ersten Anfange des Unterrichtes im Rechnen damit bekannt werden würden?

Ich möchte sogar vermuthen, dem Lehrer selbst gieng ein bedeutender Vortheil dadurch zu, wenn bey manchem, vorzüglich bey einem großen Exempel in der Division oft mehr als die Hälfte Ziffern, ja, recht überflüßig anzuschreiben, zu vermeiden wären?

Der Hauptvortheil hievon wird sich aber erst später, wo die Division mit benamten Zahlen vorgenommen werden wird, ergeben, wie nützlich es wäre, wenn diese verkürzte Art zum Besten der Lehrer und zum allgemeinen Nutzen der Schulkinder einzuführen anbefohlen würde, wozu ich jedoch nicht im Geringsten Etwas vorgeschrieben haben will; sondern nur die so redliche Absicht damit verbinde: für Lehrer und Lernende es damit gut gemeint zu haben.

Ich habe zu mehrerer Bequemlichkeit bey Ausübung dieser Spezies der Division eine Erleichterungs-Tabelle entworfen, die zu diesem Behufe anliegt, und folgendermassen angewendet werden kann. Wenn ich z. B. mit der Zahl

79.310,568. in 36,495:497,674.178,304.

dividire; so nehme ich die ersten drey Ziffern mit 793. zur Grundlage an; vom Dividend hingegen die ersten vier Ziffern mit der Zahl 3649.

Nun suche ich in der Tabelle 793. auf, und es wird sich gegen die rechte Seite eine Zahl vorfinden, die jener dem Dividend per 3649 nicht gleich groß ist, auch nicht so groß seyn darf, jedoch derselben am nächsten kommt, und in der Zahl 3172. besteht. Oben finde ich sodann den einfachen Quotienten mit 4., welcher ohne Anstand hiezu angenommen werden kann, wie folgt:

79310568.	3649549767 4178304.	
	−47712704.........	4. Erster.
Neue Zahl	.477127047.......	
	1263639.......	6. Zweiter.
= =	..12636394......	0. Dritter.
= =	..126363941.....	
	−47053373.....	1. Vierter.
= =	...470533737....	
	−73980897....	5. Fünfter.
= =	....739808978...	
	−26013866...	9. Sechster
= =	.....260138663..	
	−22206959..	3. Siebenter.
= =	......222069590.	
	−63448454.	2. Achter.
= =	...... 634484544.	8. Neunter.

Einfacher Quotient.

Zusammengesetzter Quotient. 460.159,328.

Von der Anwendung der Divisions-Erleichterungs-Tabelle.

793	in	3,649	geht	4	mal.	Die aufgesuchte Zahl ist . .	3,172.
793	=	4,771	=	6	=	= = = = . .	4,758.
793	=	126	=	0	=	= = = = . .	—
793	=	1,263	=	1	=	NB. Bey der Ziffer 1. zeigt sich nie eine Zahl.	
793	=	4,705	=	5	=	Die aufgesuchte Zahl ist . .	3,965.
793	=	7,398	=	9	=	= = = = . .	7,137.
793	=	2,601	=	3	=	= = = = . .	2,379.
793	=	2,220	=	2	=	= = = = . .	1,586.
793	=	6,344	=	8	=	= = = = . .	6,344.

und ist demnach durch den Quotienten 460.159,328. das Divisions-Exempel, bey welchem der Divisor in dem Dividend so oft enthalten ist, dadurch vollständig aufgelöst werden.

Bemerkung.

Dieses vorstehende, bereits berechnete Divisions-Exempel machte ich vorsetzlich auf diese umständliche Art, damit man nicht nur die eigentliche Verfahrungsweise der Divisions-Erleichterungs-Tabelle dadurch genau kennen lernen; sondern auch mit jeder nachfolgenden neuen Zahl des Dividends eben so bekannt werden möge (wovon früher schon, jedoch auf eine ganz andere Art, die Rede war;) daher zu dieser Spezies, oder zum fernern Gebrauch der oftbesagten Divisions-Erleichterungs-Tabelle, die nachfolgt, sonst keine anderweitige Zergliederung oder Aufklärung mehr nothwendig seyn wird, und wird somit der sechste Abschnitt mit diesen Uebungs-Beyspielen beschlossen.

	a.		b.		c.
123.	273306.	— 321.	713262.	— 1234.	4112922.
	d.		e.		f.
4321.	14401893.	— 12345.	54861180.	— 54321.	241402524.
	g.		h.		
123456.	6857980000.	— 654321.	3634753155.		
	i.		k.		
1234567.	8229623622.	— 7654321.	51023703786.		
	l.		m.		
12345678.	96012337806.	— 87654321.	681687654417.		
	n.		o.		
123456789.	1097283940632.	— 987654321.	9875555555679.		

Besondere Bemerkung.

Zu einer fernern Uebung und zu mehrerer Vervollkommnung der verkürzten Divisionsart, möchte ich recht gerne auf die Uebungs-Beyspiele der Multiplikation, die von Lit. a. bis h. einschlüßig nach der 45ten Frage vorgetragen sind, hinweisen, um die Probe durch die Division hierüber zu machen; indem die Divisions-Erleichterungs-Tabelle einen wesentlichen Einfluß hierauf hat..

Divisions = Erleichterungs = Tabelle.

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81
10	20	30	40	50	60	70	80	90
11	22	33	44	55	66	77	88	99
12	24	36	48	60	72	84	96	108
13	26	39	52	65	78	91	104	117
14	28	42	56	70	84	98	112	126
15	30	45	60	75	90	105	120	135
16	32	48	64	80	96	112	128	144
17	34	51	68	85	102	119	136	153
18	36	54	72	90	108	126	144	162
19	38	57	76	95	114	133	152	171
20	40	60	80	100	120	140	160	180
21	42	63	84	105	126	147	168	189
22	44	66	88	110	132	154	176	198
23	46	69	92	115	138	161	184	207
24	48	72	96	120	144	168	192	216
25	50	75	100	125	150	175	200	225
26	52	78	104	130	156	182	208	234
27	54	81	108	135	162	189	216	243
28	56	84	112	140	168	196	224	252
29	58	87	116	145	174	203	232	261
30	60	90	120	150	180	210	240	270

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
31	62	93	124	155	186	217	248	279
32	64	96	128	160	192	224	256	288
33	66	99	132	165	198	231	264	297
34	68	102	136	170	204	238	272	306
35	70	105	140	175	210	245	280	315
36	72	108	144	180	216	252	288	324
37	74	111	148	185	222	259	296	333
38	76	114	152	190	228	266	304	342
39	78	117	156	195	234	273	312	351
40	80	120	160	200	240	280	320	360
41	82	123	164	205	246	287	328	369
42	84	126	168	210	252	294	336	378
43	86	129	172	215	258	301	344	387
44	88	132	176	220	264	308	352	396
45	90	135	180	225	270	315	360	405
46	92	138	184	230	276	322	368	414
47	94	141	188	235	282	329	376	423
48	96	144	192	240	288	336	384	432
49	98	147	196	245	294	343	392	441
50	100	150	200	250	300	350	400	450
51	102	153	204	255	306	357	408	459
52	104	156	208	260	312	364	416	468
53	106	159	212	265	318	371	424	477
54	108	162	216	270	324	378	432	486
55	110	165	220	275	330	385	440	495
56	112	168	224	280	336	392	448	504
57	114	171	228	285	342	399	456	513
58	116	174	232	290	348	406	464	522
59	118	177	236	295	354	413	472	531
60	120	180	240	300	360	420	480	540
61	122	183	244	305	366	427	488	549
62	124	186	248	310	372	434	496	558
63	126	189	252	315	378	441	504	567
64	128	192	256	320	384	448	512	576

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
65	130	195	260	325	390	455	520	585
66	132	198	264	330	396	462	528	594
67	134	201	268	335	402	469	536	603
68	136	204	272	340	408	476	544	612
69	138	207	276	345	414	483	552	621
70	140	210	280	350	420	490	560	630
71	142	213	284	355	426	497	568	639
72	144	216	288	360	432	504	576	648
73	146	219	292	365	438	511	584	657
74	148	222	296	370	444	518	592	666
75	150	225	300	375	450	525	600	675
76	152	228	304	380	456	532	608	684
77	154	231	308	385	462	539	616	693
78	156	234	312	390	468	546	624	702
79	158	237	316	395	474	55	632	711
80	160	240	320	400	480	560	640	720
81	162	243	324	405	486	567	648	729
82	164	246	328	410	492	574	656	738
83	166	249	332	415	498	581	664	747
84	168	252	336	420	50	588	672	756
85	170	255	340	425	510	595	680	765
86	172	258	344	430	516	602	688	774
87	174	261	348	435	522	609	696	783
88	176	264	352	440	528	616	704	792
89	178	267	356	445	534	623	712	801
90	180	270	360	450	540	630	720	810
91	182	273	364	455	546	637	728	819
92	184	276	368	460	552	644	736	828
93	186	279	372	465	558	651	744	837
94	188	282	376	470	564	658	752	846
95	190	285	380	475	570	665	760	855
96	192	288	384	480	576	672	768	864
97	194	291	388	485	582	679	776	873
98	196	294	392	490	588	686	784	882

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
99	198	297	396	495	594	693	792	891
100	200	300	400	500	600	700	800	900
101	202	303	404	505	606	707	808	909
102	204	306	408	510	612	714	816	918
103	206	309	412	515	618	721	824	927
104	208	312	416	520	624	728	832	936
105	210	315	420	525	630	735	840	945
106	212	318	424	530	636	742	848	954
107	214	321	428	535	642	749	856	963
108	216	324	432	540	648	756	864	972
109	218	327	436	545	654	763	872	981
110	220	330	440	550	660	770	880	990
111	222	333	444	555	666	777	888	999
112	224	336	448	560	672	784	896	1008
113	226	339	452	565	678	791	904	1017
114	228	342	456	570	684	798	912	1026
115	230	345	460	575	690	805	920	1035
116	232	348	464	580	696	812	928	1044
117	234	351	468	585	702	819	936	1053
118	236	354	472	590	708	826	944	1062
119	238	357	476	595	714	833	952	1071
120	240	360	480	600	720	840	960	1080
121	242	363	484	605	726	847	968	1089
122	244	366	488	610	732	854	976	1098
123	246	369	492	615	738	861	984	1107
124	248	372	496	620	744	868	992	1116
125	250	375	500	625	750	875	1000	1125
126	252	378	504	630	756	882	1008	1134
127	254	381	508	635	762	889	1016	1143
128	256	384	512	640	768	896	1024	1152
129	258	387	516	645	774	903	1032	1161
130	260	390	520	650	780	910	1040	1170
131	262	393	524	655	786	917	1048	1179
132	264	396	528	660	792	924	1056	1188

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
133	266	399	532	665	798	931	1064	1197
134	268	402	536	670	804	938	1072	1206
135	270	405	540	675	810	945	1080	1215
136	272	408	544	680	816	952	1088	1224
137	274	411	548	685	822	959	1096	1233
138	276	414	552	690	828	966	1104	1242
139	278	417	556	695	834	973	1112	1251
140	280	420	560	700	840	980	1120	1260
141	282	423	564	705	846	987	1128	1269
142	284	426	568	710	852	994	1136	1278
143	286	429	572	715	858	1001	1144	1287
144	288	432	576	720	864	1008	1152	1296
145	290	435	580	725	870	1015	1160	1305
146	292	438	584	730	876	1022	1168	1314
147	294	441	588	735	882	1029	1176	1323
148	296	444	592	740	888	1036	1184	1332
149	298	447	596	745	894	1043	1192	1341
150	300	450	600	750	900	1050	1200	1350
151	302	453	604	755	906	1057	1208	1359
152	304	456	608	760	912	1064	1216	1368
153	306	459	612	765	918	1071	1224	1377
154	308	462	616	770	924	1078	1232	1386
155	310	465	620	775	930	1085	1240	1395
156	312	468	624	780	936	1092	1248	1404
157	314	471	628	785	942	1099	1256	1413
158	316	474	632	790	948	1106	1264	1422
159	318	477	636	795	954	1113	1272	1431
160	320	480	640	800	960	1120	1280	1440
161	322	483	644	805	966	1127	1288	1449
162	324	486	648	810	972	1134	1296	1458
163	326	489	652	815	978	1141	1304	1467
164	328	492	656	820	984	1148	1312	1476
165	330	495	660	825	990	1155	1320	1485
166	332	498	664	830	996	1162	1328	1494

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
167	334	501	668	835	1002	1169	1336	1503
168	336	504	672	840	1008	1176	1344	1512
169	338	507	676	845	1014	1183	1352	1521
170	340	510	680	850	1020	1190	1360	1530
171	342	513	684	855	1026	1197	1368	1539
172	344	516	688	860	1032	1204	1376	1548
173	346	519	692	865	1038	1211	1384	1557
174	348	522	696	870	1044	1218	1392	1566
175	350	525	700	875	1050	1225	1400	1575
176	352	528	704	880	1056	1232	1408	1584
177	354	531	708	885	1062	1239	1416	1593
178	356	534	712	890	1068	1246	1424	1602
179	358	537	716	895	1074	1253	1432	1611
180	360	540	720	900	1080	1260	1440	1620
181	362	543	724	905	1086	1267	1448	1629
182	364	546	728	910	1092	1274	1456	1638
183	366	549	732	915	1098	1281	1464	1647
184	368	552	736	920	1104	1288	1472	1656
185	370	555	740	925	1110	1295	1480	1665
186	372	558	744	930	1116	1302	1488	1674
187	374	561	748	935	1122	1309	1496	1683
188	376	564	752	940	1128	1316	1504	1692
189	378	567	756	945	1134	1323	1512	1701
190	380	570	760	950	1140	1330	1520	1710
191	382	573	764	955	1146	1337	1528	1719
192	384	576	768	960	1152	1344	1536	1728
193	386	579	772	965	1158	1351	1544	1737
194	388	582	776	970	1164	1358	1552	1746
195	390	585	780	975	1170	1365	1560	1755
196	392	588	784	980	1176	1372	1568	1764
197	394	591	788	985	1182	1379	1576	1773
198	396	594	792	990	1188	1386	1584	1782
199	398	597	796	995	1194	1393	1592	1791
200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
201	402	603	804	1005	1206	1407	1008	1809
202	404	606	808	1010	1212	1414	1616	1818
203	406	609	812	1015	1218	1421	1624	1827
204	408	612	816	1020	1224	1428	1632	1836
205	410	615	820	1025	1230	1435	1640	1845
206	412	618	824	1030	1236	1442	1648	1854
207	414	621	828	1035	1242	1449	1656	1863
208	416	624	832	1040	1248	1456	1664	1872
209	418	627	836	1045	1254	1463	1672	1881
210	420	630	840	1050	1260	1470	1680	1890
211	422	633	844	1055	1266	1477	1688	1899
212	424	636	848	1060	1272	1484	1696	1908
213	426	639	852	1065	1278	1491	1704	1917
214	428	642	856	1070	1284	1498	1712	1926
215	430	645	860	1075	1290	1505	1720	1935
216	432	648	864	1080	1296	1512	1728	1944
217	434	651	868	1085	1302	1519	1736	1953
218	436	654	872	1090	1308	1526	1744	1962
219	438	657	876	1095	1314	1533	1752	1971
220	440	660	880	1100	1320	1540	1760	1980
221	442	663	884	1105	1326	1547	1768	1989
222	444	666	888	1110	1332	1554	1776	1998
223	446	669	892	1115	1338	1561	1784	2007
224	448	672	896	1120	1344	1568	1792	2016
225	450	675	900	1125	1350	1575	1800	2025
226	452	678	904	1130	1356	1582	1808	2034
227	454	681	908	1135	1362	1589	1816	2043
228	456	684	912	1140	1368	1596	1824	2052
229	458	687	916	1145	1374	1603	1832	2061
230	460	690	920	1150	1380	1610	1840	2070
231	462	693	924	1155	1386	1617	1848	2079
232	464	696	928	1160	1392	1624	1856	2088
233	466	699	932	1165	1398	1631	1864	2097
234	468	702	936	1170	1404	1638	1872	2106

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
235	470	705	940	1175	1410	1645	1880	2115
236	472	708	944	1180	1416	1652	1888	2124
237	474	711	948	1185	1422	1659	1896	2133
238	476	714	952	1190	1428	1666	1904	2142
239	478	717	956	1195	1434	1673	1912	2151
240	480	720	960	1200	1440	1680	1920	2160
241	482	723	964	1205	1446	1687	1928	2169
242	484	726	968	1210	1452	1694	1936	2178
243	486	729	972	1215	1458	1701	1944	2187
244	488	732	976	1220	1464	1708	1952	2196
245	490	735	980	1225	1470	1715	1960	2205
246	492	738	984	1230	1476	1722	1968	2214
247	494	741	988	1235	1482	1729	1976	2223
248	496	744	992	1240	1488	1736	1984	2232
249	498	747	996	1245	1494	1743	1992	2241
250	500	750	1000	1250	1500	1750	2000	2250
251	502	753	1004	1255	1506	1757	2008	2259
252	504	756	1008	1260	1512	1764	2016	2268
253	506	759	1012	1265	1518	1771	2024	2277
254	508	762	1016	1270	1524	1778	2032	2286
255	510	765	1020	1275	1530	1785	2040	2295
256	512	768	1024	1280	1536	1792	2048	2304
257	514	771	1028	1285	1542	1799	2056	2313
258	516	774	1032	1290	1548	1806	2064	2322
259	518	777	1036	1295	1554	1813	2072	2331
260	520	780	1040	1300	1560	1820	2080	2340
261	522	783	1044	1305	1566	1827	2088	2349
262	524	786	1048	1310	1572	1834	2 96	2358
263	526	789	1052	1315	1578	1841	2104	2367
264	528	792	1056	1320	1584	1848	2112	2376
265	530	795	1060	1325	1590	1855	2120	2385
266	532	798	1064	1330	1596	1862	2128	2394
267	534	801	1068	1335	1602	1869	2136	2403
268	536	804	1072	1340	1608	1876	2144	2412

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
269	538	807	1070	1345	1614	1883	2152	2421
270	540	810	1080	1350	1620	1890	2160	2430
271	542	813	1084	1355	1626	1897	2168	2439
272	544	816	1088	1360	1632	1904	2176	2448
273	546	819	1092	1365	1638	1911	2184	2457
274	548	822	1096	1370	1644	1918	2192	2466
275	550	825	1100	1375	1650	1925	2200	2475
276	552	828	1104	1380	1656	1932	2208	2484
277	554	831	1108	1385	1662	1939	2216	2493
278	556	834	1112	1390	1668	1946	2224	2502
279	558	837	1116	1395	1674	1953	2232	2511
280	560	840	1120	1400	1680	1960	2240	2520
281	562	843	1124	1405	1686	1907	2248	2529
282	564	846	1128	1410	1692	1974	2256	2538
283	566	849	1132	1415	1698	1981	2264	2547
284	568	852	1136	1420	1704	1988	2272	2556
285	570	855	1140	1425	1710	1995	2280	2565
286	572	858	1144	1430	1716	2002	2288	2574
287	574	861	1148	1435	1722	2009	2296	2583
288	576	864	1152	1440	1728	2016	2304	2592
289	578	867	1156	1445	1734	2023	2312	2601
290	580	870	1160	1450	1740	2030	2320	2610
291	582	873	1164	1455	1746	2037	2328	2619
292	584	876	1168	1460	1752	2044	2336	2628
293	586	879	1172	1465	1758	2051	2344	2637
294	588	882	1176	1470	1764	2058	2352	2646
295	590	885	1180	1475	1770	2065	2360	2655
296	592	888	1184	1480	1776	2072	2368	2664
297	594	891	1188	1485	1782	2079	2376	2673
298	596	894	1192	1490	1788	2086	2384	2682
299	598	897	1196	1495	1794	2093	2392	2691
300	600	900	1200	1500	1800	2100	2400	2700
301	602	903	1204	1505	1806	2107	2408	2709
302	604	906	1208	1510	1812	2114	2416	2718

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
303	606	909	1212	1515	1818	2121	2424	2727
304	608	912	1216	1520	1824	2128	2432	2736
305	610	915	1220	1525	1830	2135	2440	2745
306	612	918	1224	1530	1836	2142	2448	2754
307	614	921	1228	1535	1842	2149	2456	2763
308	616	924	1232	1540	1848	2156	2464	2772
309	618	927	1236	1545	1854	2163	2472	2781
310	620	930	1240	1550	1860	2170	2480	2790
311	622	933	1244	1555	1866	2177	2488	2799
312	624	936	1248	1560	1872	2184	2496	2808
313	626	939	1252	1565	1878	2191	2504	2817
314	628	942	1256	1570	1884	2198	2512	2826
315	630	945	1260	1575	1890	2205	2520	2835
316	632	948	1264	1580	1896	2212	2528	2844
317	634	951	1268	1585	1902	2219	2536	2853
318	636	954	1272	1590	1908	2226	2544	2862
319	638	957	1276	1595	1914	2233	2552	2871
320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880
321	642	963	1284	1605	1926	2247	2568	2889
322	644	966	1288	1610	1932	2254	2576	2898
323	646	969	1292	1615	1938	2261	2584	2907
324	648	972	1296	1620	1944	2268	2592	2916
325	650	975	1300	1625	1950	2275	2600	2925
326	652	978	1304	1630	1956	2282	2608	2934
327	654	981	1308	1635	1962	2289	2616	2943
328	656	984	1312	1640	1968	2296	2624	2952
329	658	987	1316	1645	1974	2303	2632	2961
330	660	990	1320	1650	1980	2310	2640	2970
331	662	993	1324	1655	1986	2317	2648	2979
332	664	996	1328	1660	1992	2324	2656	2988
333	666	999	1332	1665	1998	2331	2664	2997
334	668	1002	1336	1670	2004	2338	2672	3006
335	670	1005	1340	1675	2010	2345	2680	3015
336	672	1008	1344	1680	2016	2352	2688	3024

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
337	674	1011	1348	1685	2022	2359	2696	3033
338	676	1014	1352	1690	2028	2366	2704	3042
339	678	1017	1356	1695	2034	2373	2712	3051
340	680	1020	1360	1700	2040	2380	2720	3060
341	682	1023	1364	1705	2046	2387	2728	3069
342	684	1026	1368	1710	2052	2394	2736	3078
343	686	1029	1372	1715	2058	2401	2744	3087
344	688	1032	1376	1720	2064	2408	2752	3096
345	690	1035	1380	1725	2070	2415	2760	3105
346	692	1038	1384	1730	2076	2422	2768	3114
347	694	1041	1388	1735	2082	2429	2776	3123
348	696	1044	1392	1740	2088	2436	2784	3132
349	698	1047	1396	1745	2094	2443	2792	3141
350	700	1050	1400	1750	2100	2450	2800	3150
351	702	1053	1404	1755	2106	2457	2808	3159
352	704	1056	1408	1760	2112	2464	2816	3168
353	706	1059	1412	1765	2118	2471	2824	3177
354	708	1062	1416	1770	2124	2478	2832	3186
355	710	1065	1420	1775	2130	2485	2840	3195
356	712	1068	1424	1780	2136	2492	2848	3204
357	714	1071	1428	1785	2142	2499	2856	3213
358	716	1074	1432	1790	2148	2506	2864	3222
359	718	1077	1436	1795	2154	2513	2872	3231
360	720	1080	1440	1800	2160	2520	2880	3240
361	722	1083	1444	1805	2166	2527	2888	3249
362	724	1086	1448	1810	2172	2534	2896	3258
363	726	1089	1452	1815	2178	2541	2904	3267
364	728	1092	1456	1820	2184	2548	2912	3276
365	730	1095	1460	1825	2190	2555	2920	3285
366	732	1098	1464	1830	2196	2562	2928	3294
367	734	1101	1468	1835	2202	2569	2936	3303
368	736	1104	1472	1840	2208	2576	2944	3312
369	738	1107	1476	1845	2214	2583	2952	3321
370	740	1110	1480	1850	2220	2590	2960	3330

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
371	742	1113	1484	1855	2226	2597	2968	3339
372	744	1116	1488	1860	2232	2604	2976	3348
373	746	1119	1492	1865	2238	2611	2984	3357
374	748	1122	1496	1870	2244	2618	2992	3366
375	750	1125	1500	1875	2250	2625	3000	3375
376	752	1128	1504	1880	2256	2632	3008	3384
377	754	1131	1508	1885	2262	2639	3016	3393
378	756	1134	1512	1890	2268	2646	3024	3402
379	758	1137	1516	1895	2274	2653	3032	3411
380	760	1140	1520	1900	2280	2660	3040	3420
381	762	1143	1524	1905	2286	2667	3048	3429
382	764	1146	1528	1910	2292	2674	3056	3438
383	766	1149	1532	1915	2298	2681	3064	3447
384	768	1152	1536	1920	2304	2688	3072	3456
385	770	1155	1540	1925	2310	2695	3080	3465
386	772	1158	1544	1930	2316	2702	3088	3474
387	774	1161	1548	1935	2322	2709	3096	3483
388	776	1164	1552	1940	2328	2716	3104	3492
389	778	1167	1556	1945	2334	2723	3112	3501
390	780	1170	1560	1950	2340	2730	3120	3510
391	782	1173	1564	1955	2346	2737	3128	3519
392	784	1176	1568	1960	2352	2744	3136	3528
393	786	1179	1572	1965	2358	2751	3144	3537
394	788	1182	1576	1970	2364	2758	3152	3546
395	790	1185	1580	1975	2370	2765	3160	3555
396	792	1188	1584	1980	2376	2772	3168	3564
397	794	1191	1588	1985	2382	2779	3176	3573
398	796	1194	1592	1990	2388	2786	3184	3582
399	798	1197	1596	1995	2394	2793	3192	3591
400	800	1200	1600	2000	2400	2800	3200	3600
401	802	1203	1604	2005	2406	2807	3208	3609
402	804	1206	1608	2010	2412	2814	3216	3618
403	806	1209	1612	2015	2418	2821	3224	3627
404	808	1212	1616	2020	2424	2828	3232	3636

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
405	810	1215	1620	2025	2430	2835	3240	3645
406	812	1218	1624	2030	2436	2842	3248	3654
407	814	1221	1628	2035	2442	2849	3256	3663
408	816	1224	1632	2040	2448	2856	3264	3672
409	818	1227	1636	2045	2454	2863	3272	3681
410	820	1230	1640	2050	2460	2870	3280	3690
411	822	1233	1644	2055	2466	2877	3288	3699
412	824	1236	1648	2060	2472	2884	3296	3708
413	826	1239	1652	2065	2478	2891	3304	3717
414	828	1242	1656	2070	2484	2898	3312	3726
415	830	1245	1660	2075	2490	2905	3320	3735
416	832	1248	1664	2080	2496	2912	3328	3744
417	834	1251	1668	2085	2502	2919	3336	3753
418	836	1254	1672	2090	2508	2926	3344	3762
419	838	1257	1676	2095	2514	2933	3352	3771
420	840	1260	1680	2100	2520	2940	3360	3780
421	842	1263	1684	2105	2526	2947	3368	3789
422	844	1266	1688	2110	2532	2954	3376	3798
423	846	1269	1692	2115	2538	2961	3384	3807
424	848	1272	1696	2120	2544	2968	3392	3816
425	850	1275	1700	2125	2550	2975	3400	3825
426	852	1278	1704	2130	2556	2982	3408	3834
427	854	1281	1708	2135	2562	2989	3416	3843
428	856	1284	1712	2140	2568	2996	3424	3852
429	858	1287	1716	2145	2574	3003	3432	3861
430	860	1290	1720	2150	2580	3010	3440	3870
431	862	1293	1724	2155	2586	3017	3448	3879
432	864	1296	1728	2160	2592	3024	3456	3888
433	866	1299	1732	2165	2598	3031	3464	3897
434	868	1302	1736	2170	2604	3038	3472	3906
435	870	1305	1740	2175	2610	3045	3480	3915
436	872	1308	1744	2180	2616	3052	3488	3924
437	874	1311	1748	2185	2622	3059	3496	3933
438	876	1314	1752	2190	2628	3066	3504	3942

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
439	878	1317	1756	2195	2034	3073	3512	3951
440	880	1320	1760	2200	2640	3080	3520	3960
441	882	1323	1764	2205	2646	3087	3528	3969
442	884	1326	1768	2210	2652	3094	3536	3978
443	886	1329	1772	2215	2658	3101	3544	3987
444	888	1332	1776	2220	2664	3108	3552	3996
445	890	1335	1780	2225	2670	3115	3560	4005
446	892	1338	1784	2230	2676	3122	3568	4014
447	894	1341	1788	2235	2682	3129	3576	4023
448	896	1344	1792	2240	2688	3136	3584	4032
449	898	1347	1796	2245	2694	3143	3592	4041
450	900	1350	1800	2250	2700	3150	3600	4050
451	902	1353	1804	2255	2706	3157	3608	4059
452	904	1356	1808	2260	2712	3164	3616	4068
453	906	1359	1812	2265	2718	3171	3624	4077
454	908	1362	1816	2270	2724	3178	3032	4086
455	910	1365	1820	2275	2730	3185	3640	4095
456	912	1368	1824	2280	2736	3192	3648	4104
457	914	1371	1828	2285	2742	3199	3656	4113
458	916	1374	1832	2290	2748	3206	3664	4122
459	918	1377	1836	2295	2754	3213	3672	4131
460	920	1380	1840	2300	2760	3220	3680	4140
461	9 2	1383	1844	2305	2766	3227	3688	4149
462	924	1386	1848	2310	2772	3234	3696	4158
463	926	1389	1852	2315	2778	3241	3704	4167
464	928	1392	1856	2320	2784	3248	3712	4176
465	930	1395	1860	2325	2790	3255	3720	4185
466	932	1398	1864	2330	2796	3262	3728	4194
467	934	1401	1868	2335	2802	3269	3736	4203
468	936	1404	1872	2340	2808	3276	3744	4212
469	938	1407	1876	2345	2814	3283	3752	4221
470	940	1410	1880	2350	2820	3290	3760	4230
471	942	1413	1884	2355	2826	3297	3768	4239
472	944	1416	1888	2360	2832	3304	3776	4248

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
473	946	1419	1892	2365	2838	3311	3784	4257
474	948	1422	1896	2370	2844	3318	3792	4266
475	950	1425	1900	2375	2850	3325	3800	4275
476	952	1428	1904	2380	2856	3332	3808	4284
477	954	1431	1908	2385	2862	3339	3816	4293
478	956	1434	1912	2390	2868	3346	3824	4302
479	958	1437	1916	2395	2874	3353	3832	4311
480	960	1440	1920	2400	2880	3360	3840	4320
481	962	1443	1924	2405	2886	3367	3848	4329
482	964	1446	1928	2410	2892	3374	3856	4338
483	966	1449	1932	2415	2898	3381	3864	4347
484	968	1452	1936	2420	2904	3388	3872	4356
485	970	1455	1940	2425	2910	3395	3880	4365
486	972	1458	1944	2430	2916	3402	3888	4374
487	974	1461	1948	2435	2922	3409	3896	4383
488	976	1464	1952	2440	2928	3416	3904	4392
489	978	1467	1956	2445	2934	3423	3912	4401
490	980	1470	1960	2450	2940	3430	3920	4410
491	982	1473	1964	2455	2946	3437	3928	4419
492	984	1476	1968	2460	2952	3444	3936	4428
493	986	1479	1972	2465	2958	3451	3944	4437
494	988	1482	1976	2470	2964	3458	3952	4446
495	990	1485	1980	2475	2970	3465	3960	4455
496	992	1488	1984	2480	2976	3472	3968	4464
497	994	1491	1988	2485	2982	3479	3976	4473
498	996	1494	1992	2490	2988	3486	3984	4482
499	998	1497	1996	2495	2994	3493	3992	4491
500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500
501	1002	1503	2004	2505	3006	3507	4008	4509
502	1004	1506	2008	2510	3012	3514	4016	4518
503	1006	1509	2012	2515	3018	3521	4024	4527
504	1008	1512	2016	2520	3024	3528	4032	4536
505	1010	1515	2020	2525	3030	3535	4040	4545
506	1012	1518	2024	2530	3036	3542	4048	4554

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
507	1014	1521	2028	2535	3042	3549	4056	4563
508	1016	1524	2032	2540	3048	3556	4064	4572
509	1018	1527	2036	2545	3054	3563	4072	4581
510	1020	1530	2040	2550	3060	3570	4080	4590
511	1022	1533	2044	2555	3066	3577	4088	4599
512	1024	1536	2048	2560	3072	3584	4096	4608
513	1026	1539	2052	2565	3078	3591	4104	4617
514	1028	1542	2056	2570	3084	3598	4112	4626
515	1030	1545	2060	2575	3090	3605	4120	4635
516	1032	1548	2064	2580	3096	3612	4128	4644
517	1034	1551	2068	2585	3102	3619	4136	4653
518	1036	1554	2072	2590	3108	3626	4144	4662
519	1038	1557	2076	2595	3114	3633	4152	4671
520	1040	1560	2080	2600	3120	3640	4160	4680
521	1042	1563	2084	2605	3126	3647	4168	4689
522	1044	1566	2088	2610	3132	3654	4176	4698
523	1046	1569	2092	2615	3138	3661	4184	4707
524	1048	1572	2096	2620	3144	3668	4192	4716
525	1050	1575	2100	2625	3150	3675	4200	4725
526	1052	1578	2104	2630	3156	3682	4208	4734
527	1054	1581	2108	2635	3162	3689	4216	4743
528	1056	1584	2112	2640	3168	3696	4224	4752
529	1058	1587	2116	2645	3174	3703	4232	4761
530	1060	1590	2120	2650	3180	3710	4240	4770
531	1062	1593	2124	2655	3186	3717	4248	4779
532	1064	1596	2128	2660	3192	3724	4256	4788
533	1066	1599	2132	2665	3198	3731	4264	4797
534	1068	1602	2136	2670	3204	3738	4272	4806
535	1070	1605	2140	2675	3210	3745	4280	4815
536	1072	1608	2144	2680	3216	3752	4288	4824
537	1074	1611	2148	2685	3222	3759	4296	4833
538	1076	1614	2152	2690	3228	3766	4304	4842
539	1078	1617	2156	2695	3234	3773	4312	4851
540	1080	1620	2160	2700	3240	3780	4320	4860

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
541	1082	1623	2164	2705	3246	3787	4328	4869
542	1084	1626	2168	2710	3252	3794	4336	4878
543	1086	1629	2172	2715	3258	3801	4344	4887
544	1088	1632	2176	2720	3264	3808	4352	4896
545	1090	1635	2180	2725	3270	3815	4360	4905
546	1092	1638	2184	2730	3276	3822	4368	4914
547	1094	1641	2188	2735	3282	3829	4376	4923
548	1096	1644	2192	2740	3288	3836	4384	4932
549	1098	1647	2196	2745	3294	3843	4392	4941
550	1100	1650	2200	2750	3300	3850	4400	4950
551	1102	1653	2204	2755	3306	3857	4408	4959
552	1104	1656	2208	2760	3312	3864	4416	4968
553	1106	1659	2212	2765	3318	3871	4424	4977
554	1108	1662	2216	2770	3324	3878	4432	4986
555	1110	1665	2220	2775	3330	3885	4440	4995
556	1112	1668	2224	2780	3336	3892	4448	5004
557	1114	1671	2228	2785	3342	3899	4456	5013
558	1116	1674	2232	2790	3348	3906	4464	5022
559	1118	1677	2236	2795	3354	3913	4472	5031
560	1120	1680	2240	2800	3360	3920	4480	5040
561	1122	1683	2244	2805	3366	3927	4488	5049
562	1124	1686	2248	2810	3372	3934	4496	5058
563	1126	1689	2252	2815	3378	3941	4504	5067
564	1128	1692	2256	2820	3384	3948	4512	5076
565	1130	1695	2260	2825	3390	3955	4520	5085
566	1132	1698	2264	2830	3396	3962	4528	5094
567	1134	1701	2268	2835	3402	3969	4536	5103
568	1136	1704	2272	2840	3408	3976	4544	5112
569	1138	1707	2276	2845	3414	3983	4552	5121
570	1140	1710	2280	2850	3420	3990	4560	5130
571	1142	1713	2284	2855	3426	3997	4568	5139
572	1144	1716	2288	2860	3432	4004	4576	5148
573	1146	1719	2292	2865	3438	4011	4584	5157
574	1148	1722	2296	2870	3444	4018	4592	5166

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
575	1150	1725	2300	2875	3450	4025	4600	5175
576	1152	1728	2304	2880	3456	4032	4608	5184
577	1154	1731	2308	2885	3462	4039	4616	5193
578	1156	1734	2312	2890	3468	4046	4624	5202
579	1158	1737	2316	2895	3474	4053	4632	5211
580	1160	1740	2320	2900	3480	4060	4640	5220
581	1162	1743	2324	2905	3486	4067	4648	5229
582	1164	1746	2328	2910	3492	4074	4656	5238
583	1166	1749	2332	2915	3498	4081	4664	5247
584	1168	1752	2336	2920	3504	4088	4672	5256
585	1170	1755	2340	2925	3510	4095	4680	5265
586	1172	1758	2344	2930	3516	4102	4688	5274
587	1174	1761	2348	2935	3522	4109	4696	5283
588	1176	1764	2352	2940	3528	4116	4704	5292
589	1178	1767	2356	2945	3534	4123	4712	5301
590	1180	1770	2360	2950	3540	4130	4720	5310
591	1182	1773	2364	2955	3546	4137	4728	5319
592	1184	1776	2368	2960	3552	4144	4736	5328
593	1186	1779	2372	2965	3558	4151	4744	5337
594	1188	1782	2376	2970	3564	4158	4752	5346
595	1190	1785	2380	2975	3570	4165	4760	5355
596	1192	1788	2384	2980	3576	4172	4768	5364
597	1194	1791	2388	2985	3582	4179	4776	5373
598	1196	1794	2392	2990	3588	4186	4784	5382
599	1198	1797	2396	2995	3594	4193	4792	5391
600	1200	1800	2400	3000	3600	4200	4800	5400
601	1202	1803	2404	3005	3606	4207	4808	5409
602	1204	1806	2408	3010	3612	4214	4816	5418
603	1206	1809	2412	3015	3618	4221	4824	5427
604	1208	1812	2416	3020	3624	4228	4832	5436
605	1210	1815	2420	3025	3630	4235	4840	5445
606	1212	1818	2424	3030	3636	4242	4848	5454
607	1214	1821	2428	3035	3642	4249	4856	5463
608	1216	1824	2432	3040	3648	4256	4864	5472

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
609	1218	1827	2436	3045	3654	4263	4872	5481
610	1220	1830	2440	3050	3660	4270	4880	5490
611	1222	1833	2444	3055	3666	4277	4888	5499
612	1224	1836	2448	3060	3672	4284	4896	5508
613	1226	1839	2452	3065	3678	4291	4904	5517
614	1228	1842	2456	3070	3684	4298	4912	5526
615	1230	1845	2460	3075	3690	4305	4920	5535
616	1232	1848	2464	3080	3696	4312	4928	5544
617	1234	1851	2468	3085	3702	4319	4936	5553
618	1236	1854	2472	3090	3708	4326	4944	5562
619	1238	1857	2476	3095	3714	4333	4952	5571
620	1240	1860	2480	3100	3720	4340	4960	5580
621	1242	1863	2484	3105	3726	4347	4968	5589
622	1244	1866	2488	3110	3732	4354	4976	5598
623	1246	1869	2492	3115	3738	4361	4984	5607
624	1248	1872	2496	3120	3744	4368	4992	5616
625	1250	1875	2500	3125	3750	4375	5000	5625
626	1252	1878	2504	3130	3756	4382	5008	5634
627	1254	1881	2508	3135	3762	4389	5016	5643
628	1256	1884	2512	3140	3768	4396	5024	5652
629	1258	1887	2516	3145	3774	4403	5032	5661
630	1260	1890	2520	3150	3780	4410	5040	5670
631	1262	1893	2524	3155	3786	4417	5048	5679
632	1264	1896	2528	3160	3792	4424	5056	5688
633	1266	1899	2532	3165	3798	4431	5064	5697
634	1268	1902	2536	3170	3804	4438	5072	5706
635	1270	1905	2540	3175	3810	4445	5080	5715
636	1272	1908	2544	3180	3816	4452	5088	5724
637	1274	1911	2548	3185	3822	4459	5096	5733
638	1276	1914	2552	3190	3828	4466	5104	5742
639	1278	1917	2556	3195	3834	4473	5112	5751
640	1280	1920	2560	3200	3840	4480	5120	5760
641	1282	1923	2564	3205	3846	4487	5128	5769
642	1284	1926	2568	3210	3852	4494	5136	5778

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
643	1286	1929	2572	3215	3858	4501	5144	5787
644	1288	1932	2576	3220	3864	4508	5152	5796
645	1290	1935	2580	3225	3870	4515	5160	5805
646	1292	1938	2584	3230	3876	4522	5168	5814
647	1294	1941	2588	3235	3882	4529	5176	5823
648	1296	1944	2592	3240	3888	4536	5184	5832
649	1298	1947	2596	3245	3894	4543	5192	5841
650	1300	1950	2600	3250	3900	4550	5200	5850
651	1302	1953	2604	3255	3906	4557	5208	5859
652	1304	1956	2608	3260	3912	4564	5216	5868
653	1306	1959	2612	3265	3918	4571	5224	5877
654	1308	1962	2616	3270	3924	4578	5232	5886
655	1310	1965	2620	3275	3930	4585	5240	5895
656	1312	1968	2624	3280	3936	4592	5248	5904
657	1314	1971	2628	3285	3942	4599	5256	5913
658	1316	1974	2632	3290	3948	4606	5264	5922
659	1318	1977	2636	3295	3954	4613	5272	5931
660	1320	1980	2640	3300	3960	4620	5280	5940
661	1322	1983	2644	3305	3966	4627	5288	5949
662	1324	1986	2648	3310	3972	4634	5 96	5958
663	1326	1989	2652	3315	3978	4641	5304	5967
664	1328	1992	2656	3320	3984	4648	5312	5976
665	1330	1995	2660	3325	3990	4655	5320	5985
666	1332	1998	2664	3330	3996	4662	5328	5994
667	1334	2001	2668	3335	4002	4669	5336	6003
668	1336	2004	2672	3340	4008	4676	5344	6012
669	1338	2007	2676	3345	4014	4683	5352	6021
670	1340	2010	2680	3350	4020	4690	5360	6030
671	1342	2013	2684	3355	4026	4697	5368	6039
672	1344	2016	2688	3360	4032	4704	5376	6048
673	1346	2019	2692	3365	4038	4711	5384	6057
674	1348	2022	2696	3370	4044	4718	5392	6066
675	1350	2025	2700	3375	4050	4725	5400	6075
676	1352	2028	2704	3380	4056	4732	5408	6084

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
677	1354	2031	2708	3385	4062	4739	5416	6093
678	1356	2034	2712	3390	4068	4746	5424	6102
679	1358	2037	2716	3395	4074	4753	5432	6111
680	1360	2040	2720	3400	4080	4760	5440	6120
681	1362	2043	2724	3405	4086	4767	5448	6129
682	1364	2046	2728	3410	4092	4774	5456	6138
683	1366	2049	2732	3415	4098	4781	5464	6147
684	1368	2052	2736	3420	4104	4788	5472	6156
685	1370	2055	2740	3425	4110	4795	5480	6165
686	1372	2058	2744	3430	4116	4802	5488	6174
687	1374	2061	2748	3435	4122	4809	5496	6183
688	1376	2064	2752	3440	4128	4816	5504	6192
689	1378	2067	2756	3445	4134	4823	5512	6201
690	1380	2070	2760	3450	4140	4830	5520	6210
691	1382	2073	2764	3455	4146	4837	5528	6219
692	1384	2076	2768	3460	4152	4844	5536	6228
693	1386	2079	2772	3465	4158	4851	5544	6237
694	1388	2082	2776	3470	4164	4858	5552	6246
695	1390	2085	2780	3475	4170	4865	5560	6255
696	1392	2088	2784	3480	4176	4872	5568	6264
697	1394	2091	2788	3485	4182	4879	5576	6273
698	1396	2094	2792	3490	4188	4886	5584	6282
699	1398	2097	2796	3495	4194	4893	5592	6291
700	1400	2100	2800	3500	4200	4900	5600	6300
701	1402	2103	2804	3505	4206	4907	5608	6309
702	1404	2106	2808	3510	4212	4914	5616	6318
703	1406	2109	2812	3515	4218	4921	5624	6327
704	1408	2112	2816	3520	4224	4928	5632	6336
705	1410	2115	2820	3525	4230	4935	5640	6345
706	1412	2118	2824	3530	4236	4942	5648	6354
707	1414	2121	2828	3535	4242	4949	5656	6363
708	1416	2124	2832	3540	4248	4956	5664	6372
709	1418	2127	2836	3545	4254	4963	5672	6381
710	1420	2130	2840	3550	4260	4970	5680	6390

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
711	1422	2133	2844	3555	4266	4977	5688	6399
712	1424	2136	2848	3560	4272	4984	5696	6408
713	1426	2139	2852	3565	4278	4991	5704	6417
714	1428	2142	2856	3570	4284	4998	5712	6426
715	1430	2145	2860	3575	4290	5005	5720	6435
716	1432	2148	2864	3580	4296	5012	5728	6444
717	1434	2151	2868	3585	4302	5019	5736	6453
718	1436	2154	2872	3590	4308	5026	5744	6462
719	1438	2157	2876	3595	4314	5033	5752	6471
720	1440	2160	2880	3600	4320	5040	5760	6480
721	1442	2163	2884	3605	4326	5047	5768	6489
722	1444	2166	2888	3610	4332	5054	5776	6498
723	1446	2169	2892	3615	4338	5061	5784	6507
724	1448	2172	2896	3620	4344	5068	5792	6516
725	1450	2175	2900	3625	4350	5075	5800	6525
726	1452	2178	2904	3630	4356	5082	5808	6534
727	1454	2181	2908	3635	4362	5089	5816	6543
728	1456	2184	2912	3640	4368	5096	5824	6552
729	1458	2187	2916	3645	4374	5103	5832	6561
730	1460	2190	2920	3650	4380	5110	5840	6570
731	1462	2193	2924	3655	4386	5117	5848	6579
732	1464	2196	2928	3660	4392	5124	5856	6588
733	1466	2199	2932	3665	4398	5131	5864	6597
734	1468	2202	2936	3670	4404	5138	5872	6606
735	1470	2205	2940	3675	4410	5145	5880	6615
736	1472	2208	2944	3680	4416	5152	5888	6624
737	1474	2211	2948	3685	4422	5159	5896	6633
738	1476	2214	2952	3690	4428	5166	5904	6642
739	1478	2217	2956	3695	4434	5173	5912	6651
740	1480	2220	2960	3700	4440	5180	5920	6660
741	1482	2223	2964	3705	4446	5187	5928	6669
742	1484	2226	2968	3710	4452	5194	5936	6678
743	1486	2229	2972	3715	4458	5201	5944	6687
744	1488	2232	2976	3720	4464	5208	5952	6696

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
745	1490	2235	2980	3725	4470	5215	5960	6705
746	1492	2238	2984	3730	4476	5222	5968	6714
747	1494	2241	2988	3735	4482	5229	5976	6723
748	1496	2244	2992	3740	4488	5236	5984	6732
749	1498	2247	2996	3745	4494	5243	5992	6741
750	1500	2250	3000	3750	4500	5250	6000	6750
751	1502	2253	3004	3755	4506	5257	6008	6759
752	1504	2256	3008	3760	4512	5264	6016	6768
753	1506	2259	3012	3765	4518	5271	6024	6777
754	1508	2262	3016	3770	4524	5278	6032	6786
755	1510	2265	3020	3775	4530	5285	6040	6795
756	1512	2268	3024	3780	4536	5292	6048	6804
757	1514	2271	3028	3785	4542	5299	6056	6813
758	1516	2274	3032	3790	4548	5306	6064	6822
759	1518	2277	3036	3795	4554	5313	6072	6831
760	1520	2280	3040	3800	4560	5320	6080	6840
761	1522	2283	3044	3805	4566	5327	6088	6849
762	1524	2286	3048	3810	4572	5334	6096	6858
763	1526	2289	3052	3815	4578	5341	6104	6867
764	1528	2292	3056	3820	4584	5348	6112	6876
765	1530	2295	3060	3825	4590	5355	6120	6885
766	1532	2298	3064	3830	4596	5362	6128	6894
767	1534	2301	3068	3835	4602	5369	6136	6903
768	1536	2304	3072	3840	4608	5376	6144	6912
769	1538	2307	3076	3845	4614	5383	6152	6921
770	1540	2310	3080	3850	4620	5390	6160	6930
771	1542	2313	3084	3855	4626	5397	6168	6939
772	1544	2316	3088	3860	4632	5404	6176	6948
773	1546	2319	3092	3865	4638	5411	6184	6957
774	1548	2322	3096	3870	4644	5418	6192	6966
775	1550	2325	3100	3875	4650	5425	6200	6975
776	1552	2328	3104	3880	4656	5432	6208	6984
777	1554	2331	3108	3885	4662	5439	6216	6993
778	1556	2334	3112	3890	4608	5446	6224	7002

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
779	1558	2337	3116	3895	4674	5453	6232	7011
780	1560	2340	3120	3900	4680	5460	6240	7020
781	1562	2343	3124	3905	4686	5467	6248	7029
782	1564	2346	3128	3910	4692	5474	6256	7038
783	1566	2349	3132	3915	4698	5481	6264	7047
784	1568	2352	3136	3920	4704	5488	6272	7056
785	1570	2355	3140	3925	4710	5495	6280	7065
786	1572	2358	3144	3930	4716	5502	6288	7074
787	1574	2361	3148	3935	4722	5509	6296	7083
788	1576	2364	3152	3940	4728	5516	6304	7092
789	1578	2367	3156	3945	4734	5523	6312	7101
790	1580	2370	3160	3950	4740	5530	63 0	7110
791	1582	2373	3 64	3955	4746	5537	6328	7119
792	1584	2376	3168	3960	4752	5544	6336	7128
793	1586	2379	3172	3965	4758	5551	6344	7137
794	1588	2382	3176	3970	4764	5558	6352	7146
795	1590	2385	3180	3975	4770	5565	6360	7155
796	1592	2388	3184	3980	4776	5572	6368	7164
797	1594	2391	3188	3985	4782	5579	6376	7173
798	1596	2394	3192	3990	4788	5586	6384	7182
799	1598	2397	3196	3995	4794	5593	6392	7191
800	1600	2400	3200	4000	4800	5600	6400	7200
801	1602	2403	3204	4005	4806	5607	6408	7209
802	1604	2406	3208	4010	4812	614	6416	7218
803	1606	2409	3212	4015	4818	5621	6424	7227
804	1608	2412	3216	4020	4824	5628	6432	7236
805	1610	2415	3220	4025	4830	5635	6440	7245
806	1612	2418	3224	4030	4836	5642	6448	7254
807	1614	2421	3228	4035	4842	5649	6456	7263
808	1616	2424	3232	4040	4848	5 56	6464	7272
809	1618	2427	3236	4045	4854	5663	6472	7281
810	1620	2430	3240	4050	4860	5670	6480	7290
811	1622	2433	3244	4055	4866	5677	6488	7299
812	1624	2436	3248	4060	4872	5684	6496	7308

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
813	1626	2439	3252	4065	4878	5691	6504	7317
814	1628	2442	3256	4070	4884	5698	6512	7326
815	1630	2445	3260	4075	4890	5705	6520	7335
816	1632	2448	3264	4080	4896	5712	6528	7344
817	1634	2451	3268	4085	4902	5719	6536	7353
818	1636	2454	3272	4090	4908	5726	6544	7362
819	1638	2457	3276	4095	4914	5733	6552	7371
820	1640	2460	3280	4100	4920	5740	6560	7380
821	1642	2463	3284	4105	4926	5747	6568	7389
822	1644	2466	3288	4110	4932	5754	6576	7398
823	1646	2469	3292	4115	4938	5761	6584	7407
824	1648	2472	3296	4120	4944	5768	6592	7416
825	1650	2475	3300	4125	4950	5775	6600	7425
826	1652	2478	3304	4130	4956	5782	6608	7434
827	1654	2481	3308	4135	4962	5789	6616	7443
828	1656	2484	3312	4140	4968	5796	6624	7452
829	1658	2487	3316	4145	4974	5803	6632	7461
830	1660	2490	3320	4150	4980	5810	6640	7470
831	1662	2493	3324	4155	4986	5817	6648	7479
832	1664	2496	3328	4160	4992	5824	6656	7488
833	1666	2499	3332	4165	4998	5831	6664	7497
834	1668	2502	3336	4170	5004	5838	6672	7506
835	1670	2505	3340	4175	5010	5845	6680	7515
836	1672	2508	3344	4180	5016	5852	6688	7524
837	1674	2511	3348	4185	5022	5859	6696	7533
838	1676	2514	3352	4190	5028	5866	6704	7542
839	1678	2517	3356	4195	5034	5873	6712	7551
840	1680	2520	3360	4200	5040	5880	6720	7560
841	1682	2523	3364	4205	5046	5887	6728	7569
842	1684	2526	3368	4210	5052	5894	6736	7578
843	1686	2529	3372	4215	5058	5901	6744	7587
844	1688	2532	3376	4220	5064	5908	6752	7596
845	1690	2535	3380	4225	5070	5915	6760	7605
846	1692	2538	3384	4230	5076	5922	6768	7614

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
847	1694	2541	3388	4235	5082	5929	6776	7623
848	1696	2544	3392	4240	5088	5936	6784	7632
849	1698	2547	3396	4245	5094	5943	6792	7641
850	1700	2550	3400	4250	5100	5950	6800	7650
851	1702	2553	3404	4255	5106	5957	6808	7659
852	1704	2556	3408	4260	5112	5964	6816	7668
853	1706	2559	3412	4265	5118	5971	6824	7677
854	1708	2562	3416	4270	5124	5978	6832	7686
855	1710	2565	3420	4275	5130	5985	6840	7695
856	1712	2568	3424	4280	5136	5992	6848	7704
857	1714	2571	3428	4285	5142	5999	6856	7713
858	1716	2574	3432	4290	5148	6006	6864	7722
859	1718	2577	3436	4295	5154	6013	6872	7731
860	1720	2580	3440	4300	5160	6020	6880	7740
861	1722	2583	3444	4305	5166	6027	6888	7749
862	1724	2586	3448	4310	5172	6034	6896	7758
863	1726	2589	3452	4315	5178	6041	6904	7767
864	1728	2592	3456	4320	5184	6048	6912	7776
865	1730	2595	3460	4325	5190	6055	6920	7785
866	1732	2598	3464	4330	5196	6062	6928	7794
867	1734	2601	3468	4335	5202	6069	6936	7803
868	1736	2604	3472	4340	5208	6076	6944	7812
869	1738	2607	3476	4345	5214	6083	6952	7821
870	1740	2610	3480	4350	5220	6090	6960	7830
871	1742	2613	3484	4355	5226	6097	6968	7839
872	1744	2616	3488	4360	5232	6104	6976	7848
873	1746	2619	3492	4365	5238	6111	6984	7857
874	1748	2622	3496	4370	5244	6118	6992	7866
875	1750	2625	3500	4375	5250	6125	7000	7875
876	1752	2628	3504	4380	5256	6132	7008	7884
877	1754	2631	3508	4385	5262	6139	7016	7893
878	1756	2634	3512	4390	5268	6146	7024	7902
879	1758	2637	3516	4395	5274	6153	7032	7911
880	1760	2640	3520	4400	5280	6160	7040	7920

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
881	1762	2643	3524	4405	5286	6167	7048	7929
882	1764	2646	3528	4410	5292	6174	7056	7938
883	1766	2649	3532	4415	5298	6181	7064	7947
884	1768	2652	3536	4420	5304	6188	7072	7956
885	1770	2655	3540	4425	5310	6195	7080	7965
886	1772	2658	3544	4430	5316	6202	7088	7974
887	1774	2661	3548	4435	5322	6209	7096	7983
888	1776	2664	3552	4440	5328	6216	7104	7992
889	1778	2667	3556	4445	5334	6223	7112	8001
890	1780	2670	3560	4450	5340	6230	7120	8010
891	1782	2673	3564	4455	5346	6237	7128	8019
892	1784	2676	3568	4460	5352	6244	7136	8028
893	1786	2679	3572	4465	5358	6251	7144	8037
894	1788	2682	3576	4470	5364	6258	7152	8046
895	1790	2685	3580	4475	5370	6265	7160	8055
896	1792	2688	3584	4480	5376	6272	7168	8064
897	1794	2691	3588	4485	5382	6279	7176	8073
898	1796	2694	3592	4490	5388	6286	7184	8082
899	1798	2697	3596	4495	5394	6293	7192	8091
900	1800	2700	3600	4500	5400	6300	7200	8100
901	1802	2703	3604	4505	5406	6307	7208	8109
902	1804	2706	3608	4510	5412	6314	7216	8118
903	1806	2709	3612	4515	5418	6321	7224	8127
904	1808	2712	3616	4520	5424	6328	7232	8136
905	1810	2715	3620	4525	5430	6335	7240	8145
906	1812	2718	3624	4530	5436	6342	7248	8154
907	1814	2721	3628	4535	5442	6349	7256	8163
908	1816	2724	3632	4540	5448	6356	7264	8172
909	1818	2727	3636	4545	5454	6363	7272	8181
910	1820	2730	3640	4550	5460	6370	7280	8190
911	1822	2733	3644	4555	5466	6377	7288	8199
912	1824	2736	3648	4560	5472	6384	7296	8208
913	1826	2739	3652	4565	5478	6391	7304	8217
914	1828	2742	3656	4570	5484	6398	7312	8226

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
915	1830	2745	3660	4575	5490	6405	7320	8235
916	1832	2748	3664	4580	5496	6412	7328	8244
917	1834	2751	3668	4585	5502	6419	7336	8253
918	1836	2754	3672	4590	5508	6426	7344	8262
919	1838	2757	3676	4595	5514	6433	7352	8271
920	1840	2760	3680	4600	5520	6440	7360	8280
921	1842	2763	3684	4605	5526	6447	7368	8289
922	1844	2766	3688	4610	5532	6454	7376	8298
923	1846	2769	3692	4615	5538	6461	7384	8307
924	1848	2772	3696	4620	5544	6468	7392	8316
925	1850	2775	3700	4625	5550	6475	7400	8325
926	1852	2778	3704	4630	5556	6482	7408	8334
927	1854	2781	3708	4635	5562	6489	7416	8343
928	1856	2784	3712	4640	5568	6496	7424	8352
929	1858	2787	3716	4645	5574	6503	7432	8361
930	1860	2790	3720	4650	5580	6510	7440	8370
931	1862	2793	3724	4655	5586	6517	7448	8379
932	1864	2796	3728	4660	5592	6524	7456	8388
933	1866	2799	3732	4665	5598	6531	7464	8397
934	1868	2802	3736	4670	5604	6538	7472	8406
935	1870	2805	3740	4675	5610	6545	7480	8415
936	1872	2808	3744	4680	5616	6552	7488	8424
937	1874	2811	3748	4685	5622	6559	7496	8433
938	1876	2814	3752	4690	5628	6566	7504	8442
939	1878	2817	3756	4695	5634	6573	7512	8451
940	1880	2820	3760	4700	5640	6580	7520	8460
941	1882	2823	3764	4705	5646	6587	7528	8469
942	1884	2826	3768	4710	5652	6594	7536	8478
943	1886	2829	3772	4715	5658	6601	7544	8487
944	1888	2832	3776	4720	5664	6608	7552	8496
945	1890	2835	3780	4725	5670	6615	7560	8505
946	1892	2838	3784	4730	5676	6622	7568	8514
947	1894	2841	3788	4735	5682	6629	7576	8523
948	1896	2844	3792	4740	5688	6636	7584	8532

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
949	1898	2847	3796	4745	5694	6643	7592	8541
950	1900	2850	3800	4750	5700	6650	7600	8550
951	1902	2853	3804	4755	5706	6657	7608	8559
952	1904	2856	3808	4760	5712	6664	7616	8568
953	1906	2859	3812	4765	5718	6671	7624	8577
954	1908	2862	3816	4770	5724	6678	7632	8586
955	1910	2865	3820	4775	5730	6685	7640	8595
956	1912	2868	3824	4780	5736	6692	7648	8604
957	1914	2871	3828	4785	5742	6699	7656	8613
958	1916	2874	3832	4790	5748	6706	7664	8622
959	1918	2877	3836	4795	5754	6713	7672	8631
960	1920	2880	3840	4800	5760	6720	7680	8640
961	1922	2883	3844	4805	5766	6727	7688	8649
962	1924	2886	3848	4810	5772	6734	7696	8658
963	1926	2889	3852	4815	5778	6741	7704	8667
964	1928	2892	3856	4820	5784	6748	7712	8676
965	1930	2895	3860	4825	5790	6755	7720	8685
966	1932	2898	3864	4830	5796	6762	7728	8694
967	1934	2901	3868	4835	5802	6769	7736	8703
968	1936	2904	3872	4840	5808	6776	7744	8712
969	1938	2907	3876	4845	5814	6783	7752	8721
970	1940	2910	3880	4850	5820	6790	7760	8730
971	1942	2913	3884	4855	5826	6797	7768	8739
972	1944	2916	3888	4860	5832	6804	7776	8748
973	1946	2919	3892	4865	5838	6811	7784	8757
974	1948	2922	3896	4870	5844	6818	7792	8766
975	1950	2925	3900	4875	5850	6825	7800	8775
976	1952	2928	3904	4880	5856	6832	7808	8784
977	1954	2931	3908	4885	5862	6839	7816	8793
978	1956	2934	3912	4890	5868	6846	7824	8802
979	1958	2937	3916	4895	5874	6853	7832	8811
980	1960	2940	3920	4900	5880	6860	7840	8820
981	1962	2943	3924	4905	5886	6867	7848	8829
982	1964	2946	3928	4910	5892	6874	7856	8838

mal	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
983	1966	2949	3932	4915	5898	6881	7864	8847
984	1968	2952	3936	4920	5904	6888	7872	8856
985	1970	2955	3940	4925	5910	6895	7880	8865
986	1972	2958	3944	4930	5916	6902	7888	8874
987	1974	2961	3948	4935	5922	6909	7896	8883
988	1976	2964	3952	4940	5928	6916	7904	8892
989	1978	2967	3956	4945	5934	6923	7912	8901
990	1980	2970	3960	4950	5940	6930	7920	8910
991	1982	2973	3964	4955	5946	6937	7928	8919
992	1984	2976	3968	4960	5952	6944	7936	8928
993	1986	2979	3972	4965	5958	6951	7944	8937
994	1988	2982	3976	4970	5964	6958	7952	8946
995	1990	2985	3980	4975	5970	6965	7960	8955
996	1992	2988	3984	4980	5976	6972	7968	8964
997	1994	2991	3988	4985	5982	6979	7976	8973
998	1996	2994	3992	4990	5988	6986	7984	8982
999	1998	2997	3996	4995	5994	6993	7992	8991
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

Bemerkung.

Nicht nur zur Theilung allein ist diese Divisions-Erleichterungs-Tabelle bestimmt; sie hat auch ganz andere Eigenschaften an ihr. Z. B. Man addire eine Rubrik nach der andern hinauf; die Erste von jeder Seite ist der Multiplikandus; jene Ziffern oben von 2. bis 9. sind jedesmal der Multiplikator; und in den übrigen Rubriken sind die Produkte enthalten.

Man nehme also gleich die erste Rubrik der ersten Seite hiezu, nemlich zum Addiren her, welche eine Summe von 465. abwerfen wird. Addire die übrigen Rubriken auch, und vervielfältige diese Zahl 465. mit 2. 3. 4. ꝛc. bis 9. einschlüßig, so muß das Produkt hievon immer der gezogenen Summe gleich seyn. Am Ende alle speziellen Summen zusammenaddirt, so viel abwerfen müssen, als wenn die Zahl 465. mit 44. vervielfältiget werden würde. — Dieses wäre für die Jugend gewiß eine sehr vortheilhafte Uebung.

Siebenter Abschnitt.

Von der Addition,

und zwar:

a. mit benamten,
b. = gebrochenen, und
c. = gemischten Zahlen.

---

ad a. Die Addition mit benamten Zahlen betreffend.

53te Frage. Was heißt Addiren mit benamten Zahlen?

Antw. Mit benamten Zahlen die Addition, oder, was gleichviel ist, eine Zusammenzählung mit denselben vornehmen, heißt eigentlich, daß ich diesen Zahlen eine gewisse, vielmehr bekannte Benennung beylegen muß, bestehe solche

a. in Geld.
b. = ordinären } Gewicht.
c. = Apotheker }
d. = Gold }
e. = Silber }
f. = Papier.
g. = Ellen } Maaß.
h. = Zeit }
i. = flüßigen, oder auch }
k. = Getreid }

54te Frage. Was hat man bey dergleichen Additionen zu beobachten?

Antw. Daß nur gleichartige Dinge zusammengezählt werden; indem sich z. B. Geld mit Gewicht, mit Ellen= oder flüßigen Maaßen ꝛc. nicht vermengen ließe, weil diese verschiedenen Gegenstände von ungleichartiger Natur sind.

55te Frage. Was wird hierin wohl sonst noch zu berücksichtigen seyn?

Antw. Daß von jedem vorhin benannten Gegenstande, und zwar von a. bis k. einschlüßig, jede Sorte für sich als Hauptbenennung zu bestehen habe, die jedoch in kleiner benannte Unterabtheilungen aufgelöst werden können.

56te Frage. Wie ist das zu verstehen?

Antw. Auf nachstehende Weise:

ad a. Das Geld betreffend.

Wo man mit Gulden zu rechnen pflegt, da sind deren Unterabtheilungen: Kreutzer, Pfenning und Heller, und sind solches lauter gangbare Münzen, die auf folgende Art eingetheilt werden. Z. B.

1 Gulden	hält	60 Kreutzer	(Kr.)
1 Kreutzer	=	4 Pfenning	(Pf.)
1 Pfenning	=	2 Heller	(Hlr.)

ad b. Das ordinäre, oder Kaufmanns-Gewicht betreffend.

Bey diesem ist der Zentner die Hauptbenennung, dessen Unterabtheilungen aber:

1 Zentner	hat	100 Pfund	(℔.)
1 Pfund	=	32 Loth	(Lth.)
1 Viertelpfund	=	8 Loth	($\frac{1}{4}$ ℔.)
1 Loth	=	4 Quint	(Qt.)

ad c. Das Apotheker-Gewicht betreffend.

Deren Hauptbenennung ist ein Pfund, und dessen Unterabtheilungen sind:

1 Pfund	hält	12 Unzen oder 24 Loth.
1 Unze	=	2 Loth oder 8 Drachmen.
1 Drachma	=	3 Skrupel.
1 Skrupel	=	20 Gran.

ad d. Das Gold-Gewicht betreffend.

Hievon ist die Hauptbenennung: Pfund, und wird abgetheilt:

1 Pfund	hält	2 Mark.
1 Mark	=	24 Karat.
1 Karat	=	4 Gran.
1 Gran	=	3 Gren.

ad e. Das Silber = Gewicht betreffend.

Hievon ist eine Mark Silber ein halbes Pfund, oder, was gleichviel ist, 16 Loth. Außerdessen wie bey dem Kaufmanns = Gewicht.

ad f. Das Papier betreffend.

Dieses hat zur Hauptbenennung: einen Ballen, dessen Unterabtheilungen Rieß, Buch und Bogen sind, nemlich:

1 Ballen . . .	hält	10	Rieß.
1 Rieß	=	20	Buch.
1 Buch Schreibpapier	=	24	Bogen.
1 = Druckpapier	=	25	=

ad g. Das Ellen = Maaß betreffend.

Eine Elle als Hauptbenennung wird am gewöhnlichsten eingetheilt: und zwar:

in eine Siebenachtels ($\frac{7}{8}$.)
= = Dreyviertels ($\frac{3}{4}$.)
= = Fünfachtels ($\frac{5}{8}$.)
= = Halbe ($\frac{1}{2}$.)
= = Dreyachtels ($\frac{3}{8}$.)
= = Viertels ($\frac{1}{4}$.)
= = Achtels ($\frac{1}{8}$.)
und = = Sechzehntels ($\frac{1}{16}$.)
} Elle.

Ob nun die ganze Elle an sich länger oder kürzer seye, je nachdem es die Landessitte mit sich bringt; — auch wird solche

in eine Zweydrittels ($\frac{2}{3}$.)
= = Eindrittels ($\frac{1}{3}$.)
= = Sechstels ($\frac{1}{6}$.)
und = = Einzwölftels ($\frac{1}{12}$.)
} Elle ein= oder abgetheilt.

ad h. Das Zeit = Maaß betreffend.

Die Hauptbenennung hievon ist ein Jahr, welches abgetheilt wird:

in 12 Monate, zu 28. 30. und 31 Tage.
= 52 Wochen, eine à 7 Tage.
= 365 Tage, das Schaltjahr zu 366 Tage.
= 24 Stunden auf einen Tag.
= 60 Minuten auf eine Stunde.
= 60 Sekunden auf eine Minute.

ad i. **Das flüßige, oder Getränk-Maaß betreffend.**

Dessen Hauptbenennung ist Fuder; dann Ohm, Eimer, Maß, Halbemaß und Quart, nemlich:

1 Fuder	hält	6 Ohm.
1 Ohm	=	2 Eimer.
1 Eimer	=	60 Maß.
1 Maß	=	2 Halbe (Seidel.)
1 Halbe	=	2 Quart.

ad k. **Das Getreid-Maaß betreffend.**

(Wie solches zum Unterrichte in den Schulen angenommen ist.)

Bey diesem ist die Hauptbenennung: Schäffel; dann Metzen, Viertel, Mäßlein und Dreißiger, und zwar:

1 Schäffel	giebt	6 Metzen.
1 Metzen	=	2 Viertel.
1 Viertel	=	8 Mäßlein, und
1 Mäßlein	=	2 Dreißiger.

57te **Frage.** Diese Gegenstände mit ihren Unterabtheilungen habe ich, wie mir solche vorgezeichnet worden sind, nunmehr genau kennen gelernt; jetzt möchte ich aber noch recht gerne wissen, worauf man denn bey einer dergleichen vorkommenden Addition, z. B. in Geld, sein besonderes Augenmerk zu richten hat?

Antw. Darauf: daß jedesmal bey der niedrigsten Sorte im Zusammenzählen der Anfang gemacht werden muß, und man sie sodann nach und nach in gehöriger Ordnung zur verlangten Größe zu bringen sucht. Z. B.

ad a. **In Geld.**

	a.	b.	c.
	3 fl. 39 kr. 2 pf.	17 fl. 48 kr. 3 hl.	5 fl. 19 kr. 1 pf.
	9 = 43 = 1 =	465 = 39 = 2 =	3762 = 43 = 3 =
	17 = — = 3 =	709 = 52 = - =	457 = 21 = 2 =
	29 = 59 = - =	3841 = 36 = 7 =	96 = 12 = 1 =
	305 = 37 = 2 =	89745 = 27 = 6 =	41837 = 33 = 3 =
	5763 = — = - =	672497 = 51 = 5 =	9 = 57 = 3 =
Divid. Divis.	18(0 / 6(0 | 3 fl. 8 / 4 | 2 kr.	25(5 / 6(0 | 4 fl. 23 / 8 | 2 kr.	18(8 / 6(0 | 3 fl. 13 / 4 | 3 kr.
Sa.	6129 fl. — kr. - pf.	767278 fl. 15 kr. 7 hl.	46169 fl. 8 kr. 1 pf.

Erläuterung.

Bey dem ersten Exempel ad a. kamen durch das Zusammenzählen der Pfenninge 8 solcher Stücke heraus, welche durch 4. unter dem Querstrich darein dividirt 2 kr. und — Pfenning gaben. Diese 2 kr. zu den Kreutzern Links addirt, entzifferten 180 kr. mit der Auflösezahl 60. ebenfalls darein dividirt, und es kamen 3 fl. — kr. heraus. Diese 3 fl. zu jenen Gulden Links miteingerechnet, ergaben sich zusammen

6,129 fl. — kr. — pf.

Nachdem die 2 kr. und 3 fl. miteingerechnet waren, wurden solche, als Nichts mehr geltend, durchstrichen.

Besondere Belehrung.

Die gemachten Erhöhungen der geringern Sorten des Geldes in höheres, sind gleichsam nur für Anfänger im Rechnen auf diese Art vorgezeigt worden, bis dieselben mehr Uebung darin haben. Findet dieses statt, dann kann es nur so leicht geschehen, daß in Gedanken gesagt wird. Z. B. es kommen durch eine Addition 37 Pfenning heraus:

4 mal 9 ist 36. von 37 bleibt 1.

Nach dem Wort mal kommt jene Kreutzerzahl heraus, die zu der Kreutzerreihe einzurechnen ist, nemlich 9 kr.

Kommen sodann mit Hinzurechnung dieser 9 kr. hieran 511 kr. heraus, so lasse ich in Gedanken die Ziffer 1. in der Einheit gegen jene Null bey der Auflösezahl 60. dem eigentlichen Divisor weg, und sage daher kurz weg:

6 mal 8 ist 48. von 51 bleibt 3.

Nun weiß ich, daß 8 fl. und zum Rest 31 kr. herausgekommen sind, weil die abgestrichene Einheit 1. zum Kreutzer-Rest gehört.

ad b. In ordinärem Gewicht.

d.

3 Ztr.	59 ℔.	12 Lth.	3 Qt.
9 "	87 "	17 "	1 "
17 "	83 "	25 "	2 "
29 "	55 "	6 "	3 "
306 "	37 "	21 "	2 "
5258 "	76 "	12 "	1 "
Divid. 4(00 / Divis. 1(00	4 Ztr. 96/32	3 ℔. 12/4	3 Lth.
Sa. 5626 Ztr.	— ℔.	— Lth.	— Qt.

e.

57 Ztr.	43 ℔.	25 Lth.	2 Qt.
409 "	62 "	31 "	3 "
7184 "	19 "	27 "	1 "
9568 "	73 "	13 "	3 "
1234 "	86 "	19 "	2 "
8005 "	95 "	30 "	3 "
3(82 / 1(00	3 Ztr. 148/32	4 ℔. 14/4	3 Lth.
26460 Ztr.	82 ℔.	20 Lth.	2 Qt.

Bemerkung.

Die vorige besondere Belehrung wegen Erhöhung der Pfenninge zu Kreutzer, und der Kreutzer zu Gulden, findet auch hier bey Zusammenaddirung der Quint und der Zentner volle Anwendung.

Hingegegen die Erhöhung von Loth zu Pfund muß gleichwohl wegen der Zahl 32., woraus ein Pfund besteht, auf diese vorgezeigte Art beibehalten werden.

Bey vorkommenden Pfunden, und seyen es ihrer z. B. 3,796. an der Zahl, dürfen nur die letztern zwey Ziffern, nemlich die Zehnerzahl 96. abgeschnitten, und die erstern Ziffern, seyen es auch so viel es seyn wollen, zu den ganzen Zentnern, von obigen z. B. 37., miteingerechnet werden, weil 100. der Divisor ist.

ad c. In Apotheker = Gewicht.

f.

3 ℔.	11 Unz.	1 Loth.	3 Drachm.	2 Skrup.	15 Gran.
16 =	9 =	— =	2 =	1 =	19 =
8 =	7 =	1 =	1 =	2 =	16 =
6 =	4 =	1 =	1 =	2 =	12 =
7 =	10 =	1 =	1 =	1 =	9 =
5 =	1 =	— =	2 =	2 =	12 =

Divid. 45 / Divis. 12	3 ℔. 7/2	3 Unz. 14/4	3 Lth. 14/3	4 Dr. 8(3 / 2(0	4 Skr.

Summa 48 ℔. 9 Unz. 1 Loth. 2 Drachm. 2 Skrup. 3 Gran.

Bemerkung.

Auch hierin kann die Kopfrechnung, d. h. in Gedanken mit 20., mit 3., mit 4. und mit 2. angewendet werden.

ad d. In Gold = Gewicht.

g.

2 ℔.	1 Mark.	17 Karat.	3 Gran.	2 Gren.
9 =	— =	22 =	2 =	1 =
7 =	1 =	19 =	1 =	2 =
3 =	— =	23 =	2 =	1 =
1 =	1 =	12 =	3 =	— =
5 =	— =	23 =	1 =	1 =

Divid. 7 / Divis. 2	3 ℔. 119/24	4 Mk. 14/4	3 Kar. 7/3	2 Gran.

Summa 30 ℔. 1 Mark. 23 Karat. 2 Gran. 1 Gren.

ad e. In Silber = Gewicht.

h.	7 ℔.	21 Loth.	3 Quint.
	19 =	30 =	2 =
	8 =	17 =	1 =
	23 =	9 =	3 =
	14 =	27 =	2 =
	9 =	28 =	— =

Divid.	134	4 ℔.	11	2 Loth.
Divis.	32		4	

Summa 84 ℔. 6 Loth. 3 Quint.

ad f. In Papier.

i.	3 Ballen.	4 Rieß.	17 Buch.	21 Bogen.
	2 =	7 =	9 =	18 =
	5 =	3 =	16 =	9 =
	9 =	5 =	11 =	7 =
	12 =	6 =	19 =	23 =
	719 =	9 =	7 =	16 =

Divid.	3(8	3 Ball.	8(2	4 Rieß.	94	3 Buch.
Divis.	1(0		2(0		24	

Summa 753 Ballen. 8 Rieß. 2 Buch. 22 Bogen.

ad g. In Ellen = Maaß.

k.		l.		m.	
17 Ellen.	6 Sechztl.	3 Ellen.	3 Achtel.	7 Ellen.	2 Drittel.
23 =	15 =	4 =	5 =	8 =	1 =
36 =	13 =	7 =	2 =	9 =	— =
87 =	9 =	9 =	7 =	10 =	1 =
75 =	7 =	23 =	6 =	24 =	1 =
92 =	11 =	87 =	4 =	617 =	2 =

Divid.	61	3 Ellen.	27	3 Ellen.	7	2 Ellen.
Divis.	16		8		3	

Sa. 333 Ell. 13 Sechztl. 136 Ellen. 3 Achtel. 677 Ellen. 1 Drittel.

ad h. Im Zeit = Maaß.

n.	1 Jahr.	5 Monat.	23 Tage.
	7 =	9 =	16 =
	14 =	8 =	25 =
	6 =	7 =	19 =
	8 =	11 =	27 =
	19 =	3 =	11 =

Divid.	47	3 Jahr.	12(1	4 Monat.
Divis.	12		3(0	

Summa 58 Jahr. 11 Monat. 1 Tag.

o.

3	Jahr.	37	Wochen.	4	Tage.	11	Minut.	27	Sek.
4	=	49	=	5	=	27	=	36	=
5	=	28	=	6	=	12	=	47	=
6	=	51	=	3	=	41	=	39	=
7	=	36	=	2	=	57	=	24	=
8	=	38	=	1	=	34	=	35	=

Divid. 242 | 4 Jahr. 24 | 3 W. 18(5 | 3 Tag. 20(8 | 3 Min.
Divis. 52 | 7 | 6(0 | 6(0 |

Summa 37 Jahr. 34 Wochen. 3 Tage. 5 Minut. 28 Sek.

ad i. Im Getränk-Maaß.

p.

3	Fuder.	2	Ohm.	1	Eimer.	27	Maß.	3	Quart.
2	=	1	=	1	=	49	=	2	=
5	=	5	=	—	=	56	=	3	=
6	=	4	=	1	=	38	=	2	=
9	=	3	=	1	=	51	=	1	=
24	=	2	=	—	=	37	=	1	=

Divid. 21 | 3 Fud. 8 | 4 Ohm. 26(1 | 4 Eim. 12 | 3 Maß.
Divis. 6 | 2 | 6(0 | 4 |

Summa 52 Fuder. 3 Ohm. — Eimer. 21 Maß. — Quart.

ad k. In Getreid.

q.

7	Schäffel.	5	Metzen.	1	Viertl.	7	Mäßlein.	1	Dreißiger.
18	=	4	=	—	=	6	=	1	=
236	=	3	=	1	=	5	=	—	=
8742	=	2	=	1	=	4	=	1	=
92536	=	1	=	—	=	3	=	—	=
103478	=	—	=	1	=	2	=	—	=

Divid. 18 | 3 Schfl. 7 | 3 Metz. 27 | 3 Vrtl. 3 =
Divis. 6 | 2 | 8 |

Sa. 205020 Schäffel. — Metzen. 1 Viertl. 3 Mäßlein. 3 Dreißiger.

Erläuterung.

Daß über diese 16 Exempel keine Probe gemacht worden ist, geschahe deswegen, weil mit benamten Zahlen die übrigen Spezies noch nicht in Vortrag gekommen sind.

Das Erheblichste von einer solchen Addition ist übrigens das, daß man die kleinere Sorte eines Gegenstandes in Geld, oder wie immer, mit wenig Mühe umschaffen lerne.

Ich glaube, die vorgezeigte Art wäre hiezu die bequemste und natürlichste; und wie passend ist zu dessen Ausführung die verkürzte Division? —

Wir wollen deshalb nur das Exempel ad o. durchgehen. Es kamen bey demselben 208 Sekunden heraus; der Divisor 60. steht unter dieser Zahl, man schneidet oben gegen die Null von unten die Einheit 8. weg, und sagt nur: 6. in 20. geht 3 mal. 3 mal 6. ist 18. von 20. bleibt 2. Demnach zum Rest, mit oben abgeschnittenen 8. in der Einheit, zusammen 28 Sekunden verblieben sind, und der Quotient von dieser Division 3 Minuten angiebt, welche zu den Minuten eingerechnet wurden; und so sind auf die nemliche Weise 3 Tage, 3 Wochen und 4 Jahre zum Miteinrechnen herausgekommen.

Nun folgen noch Uebungs-Beyspiele:

13 Ztr.	29 ℔.	17 Loth.	1 Qt.		18 Ballen.	3 Rieß.	5 Buch.	6 Bog.
47 =	42 =	28 =	3 =		7 =	7 =	7 =	7 =
39 =	57 =	13 =	2 =		405 =	2 =	19 =	23 =
619 =	38 =	12 =	1 =		367 =	9 =	12 =	9 =
3895 =	24 =	29 =	2 =		813 =	4 =	16 =	2 =
9754 =	31 =	7 =	1 =		254 =	8 =	17 =	11 =
Sa.								

39 fl.	47 kr.	1 pf.		24 fl.	18 kr.	7 hlr.	
483 =	56 =	3 =		362 =	29 =	6 =	
794 =	39 =	2 =		4258 =	47 =	5 =	
8291 =	27 =	3 =		56003 =	36 =	4 =	
10873 =	25 =	2 =		607992 =	5 =	3 =	
478936 =	12 =	— =		7348231 =	59 =	2 =	
Sa.							

ad b. Die Addition mit gebrochenen Zahlen, vielmehr die Entstehungs-Art der Brüche und deren Eintheilung betreffend.

58te Frage. Was versteht man unter einer Bruchzahl?

Antw. Daß dieselbe einen Theil oder mehrere Theile vom Ganzen anzeige.

59te Frage. Wie wird eine Bruchzahl angeschrieben, und wie viele Zahlen sind hiezu nothwendig?

Antw. Angeschrieben werden sie auf folgende Art, und zwar: Mit zwey Zahlen. Z. B.

a.	b.	c.	d.	e.	f.	g.
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$

60te Frage. Wie werden sie ausgesprochen?

Antw. ad a. Ein Halbs (oder ein Zweitel.)
" b. Zwey Drittel.
" c. Drey Viertel.
" d. Vier Fünftel.
" e. Fünf Sechstel.
" f. Sechs Siebentel.
" g. Sieben Achtel.

61te Frage. Warum sind sie durch einen dazwischen gezogenen Querstrich von einander abgesöndert?

Antw. Um eine solche Zahl sogleich als eine Bruchzahl zu erkennen.

62te Frage. Wie nennt man denn diese Zahl unter dem Strich, und jene ob dem Strich?

Antw. Erstere den Nenner, die
Zweyte den Zähler, und jede Bruchzahl bekommt ihren Namen von dem Nenner.

63te Frage. Was hat es denn
a. mit dem Nenner, und
b. mit dem Zähler für eine Beschaffenheit?

Antw. ad a. Der Nenner zeigt mir das Ganze an, aus welchem
ad b. die Theile des Zählers genommen sind.

Wenn ich z. B. einen Apfel mitten durchschneide, so bekomme ich zwey gleiche Theile. Hievon nehme ich aber einen dieser Theile weg, was bleibt mir? — Die Hälfte, und eben diese Hälfte bezeichne ich mit der Bruchzahl

$\frac{1}{2}$ Zähler.
Nenner.

Nun schneide ich mehrere Aepfel in 3, in 4, in 5, in 6, in 7 und in 8 gleiche Theile, nehme von jeder dieser Abtheilung einen Theil weg, wie sind dann diese verbliebenen Theile durch Bruchzahlen auszudrücken? — Mit $\frac{2}{3}$tel, $\frac{3}{4}$tel, $\frac{4}{5}$tel, $\frac{5}{6}$tel, $\frac{6}{7}$tel und $\frac{7}{8}$tel.

64te Frage. Kann man nicht auch bey der Lehre von Brüchen, oder zu Berechnung mit denselben gewisse mathematische Zeichen in Hinsicht der Vereinfachung des Rechnens in Anwendung bringen, und worin bestehen sie?

Antw. a. Das Zeichen der Addition, ist ein aufrechtstehendes Kreuz . . . . . $+$
b. Das der Subtraktion, ein Querstrich $-$
c. Das der Multiplikation, ein schiefstehendes Kreuz . . . . . $\times$
d. Das der Division, zwey übereinander stehende Punkte . . . . . : und
e. Das Zeichen der Gleichheit, besteht in zwey Querstrichen . . . . $=$

65te Frage. Wie werden die Bruchzahlen eingetheilt?

Antw. a. In eigentliche, oder ächte, oder
b. in uneigentliche oder unächte.

66te Frage. Was ist ad a. ein ächter Bruch?

Antw. Dessen Zähler kleiner als der Nenner ist. Z. B.

$$\frac{5}{9} \qquad \frac{7}{12} \qquad \frac{8}{15}$$

67te Frage. Und ad b. ein unächter Bruch?

Antw. Dessen Zähler dem Nenner gleich ist, oder größer als derselbe. Z. B.

a.	b.	c.
$\frac{4}{4}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{11}{8}$

Erläuterung.

Der erste Bruch ad a. mit $\frac{4}{4}$ zeigt mir ein Ganzes an, weil der Zähler gleich groß dem Nenner ist.

Der zweyte Bruch ad b. mit $\frac{7}{6}$ ist gleich $1\frac{1}{6}$, und der dritte Bruch ad c. mit $\frac{11}{8}$ ist gleich $1\frac{3}{8}$, daher mehr als ein Ganzes.

68ste Frage. Mir kommt vor, als wäre in der Lehre von den Brüchen auch Etwas zu wissen nothwendig, das ein wesentliches Bedürfniß ist. Worin wird es bestehen?

Antw. Daß man die Unterabtheilungen von $\frac{8}{8}$, $\frac{12}{12}$, $\frac{15}{15}$ u. s. w. kennen lerne, was bey vorkommenden Berechnungen mit Brüchen von sehr großem Nutzen seyn wird. Z. B. $\frac{8}{8}$ läßt sich eintheilen:

$$\text{in } \underset{\smile}{2}\ \tfrac{6}{8} \text{ oder } \tfrac{3}{4}, \text{ auch } \underset{\smile}{4}\ \tfrac{4}{8} \text{ oder } \tfrac{1}{2}, \text{ auch } \underset{\smile}{2}\ \tfrac{2}{8} \text{ oder } \tfrac{1}{4}.$$

So ist es gemeint, und nach diesem Maßstabe habe ich folgende Auflösungs-Tabelle sehr ausführlich hiezu entworfen, aus welchem zu gründlicher Beurtheilung eines Bruches und zum Behuf der Verkleinerung desselben ein wesentlicher Vortheil hervorgehen wird.

Ich setze den Fall, es ergiebt sich zufälliger Weise ein Bruch von $\frac{27}{48}$, und ich weiß aus dieser Auflösungs-Tabelle, daß sich 3. in dem Zähler 27., so wie in dem Nenner 48. aufhebt, das heißt, daß diese beyden Zahlen dadurch verkleinert werden; so erkenne ich augenblicklich hieran einen verkleinerten Bruch von $\frac{9}{16}$.

Ueberhaupt ist die Auflösezahl aller in der besagten Auflösungs-Tabelle vorkommenden Bruchzahlen bey jeder Unterabtheilung in der Mitte angezeigt. Ferner:

Will das Wort auch so viel sagen, daß eine kleinere Unterabtheilung nachfolgt. Z. B. auf $\frac{12}{12}$ folgt $\frac{10}{12}$. Dann das Wort oder giebt zu erkennen, daß noch eine Auflösung mit 2. bey Zähler und Nenner statt finde, und $\frac{5}{6}$ der eigentlich verkleinerte und anwendbare Bruch seye.

Wenn man daher nur einigen Gebrauch von dieser Auflösungs-Tabelle machen wird, dann wird man auch erst ihren vortheilhaften Werth zu erkennen wissen.

Auflösung,

vielmehr Herstellung der Unterabtheilungen in gerade und ungerade Zahlen (die Primzahlen hievon ausgenommen) von:

																					Unter=
2/4	ist	1/2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1te
6/6	=	4/6	2) oder	2/3	auch	3/6	3) oder	1/2	auch	2/6	2) oder	1/3									2te
8/8	=	6/8	=	3/4	=	4/8	4) =	1/2	=	2/8	=	1/4	—	—	—	—	—	—	—	—	3te
9/9	=	6/9	3) =	2/3	=	3/9	3) =	1/3													4te
10/10	=	8/10	2) =	4/5	=	6/10	2) =	3/5	=	4/10	2) =	2/5	auch	2/10	2) oder	1/5					5te
12/12	=	10/12	2) =	5/6	=	8/12	4) =	2/3	=	6/12	6) =	1/2	=	4/12	4) =	1/3	auch	2/12	2) oder	1/6	6te
14/14	=	12/14	2) =	6/7	=	10/14	2) =	5/7	=	8/14	2) =	4/7	=	6/14	2) =	3/7	=	4/14	2) =	2/7	7te
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2/14	2) =	1/7	
15/15	=	12/15	3) =	4/5	=	10/15	5) =	2/3	=	9/15	3) =	3/5	=	6/15	3) =	2/5	=	3/15	3) =	1/5	8te
16/16	=	14/16	2) =	7/8	=	12/16	4) =	3/4	=	10/16	2) =	5/8	=	8/16	8) =	1/2	=	6/16	2) =	3/8	9te
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4/16	4) =	1/4	=	2/16	2) =	1/8	
18/18	=	16/18	2) =	8/9	=	14/18	2) =	7/9	=	12/18	6) =	2/3	=	10/18	2) =	5/9	=	8/18	2) =	4/9	10te
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6/18	6) =	1/3	=	4/18	2) =	2/9	=	2/18	2) =	1/9	

Abtheilung.

11te	1/2	10) „	10/20	„	3/5	4) „	12/20	„	7/10	) „	14/20	„	4/5	4) „	16/20	„	9/20	2) „	18/20	„	20/20
	1/10	2) „	2/20	„	1/5	4) „	4/20	„	3/10	2) „	6/20	„	2/5	4) „	8/20	—	—	—	—	—	—
12te	6/11	2) „	12/22	„	7/11	2) „	14/22	„	8/11	2) „	16/22	„	9/11	2) „	18/22	„	10/11	2) „	20/22	„	22/22
	2/11	2) „	4/22	„	3/11	2) „	6/22	„	4/11	2) „	8/22	„	5/11	2) „	10/22	„	1/2	11) „	11/22	—	—
	1/11	2) „	2/22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13te	2/3	8) „	16/24	„	3/4	6) „	18/24	„	5/6	4) „	20/24	„	7/8	3) „	21/24	„	11/12	2) „	22/24	„	24/24
	3/8	3) „	9/24	„	5/12	2) „	10/24	„	1/2	12) „	12/24	„	7/12	2) „	14/24	„	5/8	3) „	15/24	—	—
	1/12	2) „	2/24	„	1/8	3) „	3/24	„	1/6	4) „	4/24	„	1/4	6) „	6/24	„	1/3	8) „	8/24	—	—
14te	5/6	8) „	40/48	„	7/8	6) „	42/48	„	11/12	4) „	44/48	„	15/16	3) „	45/48	„	23/24	2) „	46/48	„	48/48
	11/16	3) „	33/48	„	17/24	2) „	34/48	„	3/4	12) „	36/48	„	19/24	2) „	38/48	„	13/16	3) „	39/48	—	—
	13/24	2) „	26/48	„	9/16	3) „	27/48	„	7/12	4) „	28/48	„	5/8	6) „	30/48	„	2/3	16) „	32/48	—	—
	3/8	6) „	18/48	„	5/12	4) „	20/48	„	7/16	3) „	21/48	„	11/24	2) „	22/48	„	1/2	24) „	24/48	—	—
	5/24	2) „	10/48	„	1/4	12) „	12/48	„	7/24	2) „	14/48	„	5/16	3) „	15/48	„	1/3	16) „	16/48	—	—
	1/16	3) „	3/48	„	1/12	4) „	4/48	„	1/8	6) „	6/48	„	1/6	8) „	8/48	„	3/16	3) „	9/48	—	—
	1/24	2) „	2/48																		

69te Frage. Wie läßt sich der Werth eines Bruchs beurtheilen?

Antw. Aus dem Verhältniß, welches Zähler und Nenner gegeneinander haben; weil sie durch Veränderung des Zählers, oder durch Abänderung des Nenners

a. sowohl größer, als

b. kleiner gemacht werden können.

70te Frage. Wie kann ad a. eine Bruchzahl größer gemacht werden?

Antw. Wenn der Zähler mit einer andern Zahl multiplizirt wird, und der Nenner unverändert stehen bleibt. Z. B.

2 mal $\frac{3}{8}$ ist $\frac{6}{8}$. Dieser Bruch hat hienach einen noch so großen Werth erhalten.

Oder:

Wenn der Nenner mit einer andern Zahl, welche in demselben enthalten ist, dividirt wird, sofort der Zähler unabgeändert stehen bleibt. Z. B.

2 in $\frac{3}{8}$ geht $\frac{3}{4}$ mal. Es liegt auch bey diesem entgegengesetzten Verfahren klar vor Augen, daß dieser Bruch einen noch so großen Werth bekommen hat, und im Verhältniß dem vorstehenden gleich seye.

Z. B. 2 mal $\frac{3}{4}$ ist $\frac{6}{8}$.

71te Frage. Und wie läßt sich ad b. ein Bruch kleiner machen?

Antw. Wenn man den Zähler durch eine andere Zahl, die in demselben enthalten ist, dividirt, und den Nenner unverändert läßt.

2 in $\frac{4}{5}$ geht $\frac{2}{5}$ mal; demnach ist vorstehende Bruchzahl um die Hälfte kleiner gemacht worden.

Oder:

Wenn der Nenner mit einer andern Zahl multiplizirt wird, und der Zähler bleibt wie er ist. Z. B.

5 mal $\frac{4}{5}$ ist $\frac{4}{25}$. Dieser Bruch ist durch die Multiplikation mit 5. kleiner gemacht worden.

72te Frage. Wann bleibt aber ein Bruch in seinem gleich großen Werthe?

Antw. Wenn Zähler und Nenner mit einer dritten Zahl multiplizirt oder dividirt werden. Z. B.

Multiplizirt. Dividirt.

$\frac{5}{5}$ mal $\frac{5}{20}$ ist $\frac{25}{100}$. 5 in $\frac{25}{100}$ geht $\frac{5}{20}$ mal.

Folgende Brüche haben alle die nemlichen Eigenschaften an sich:

	a.	b.	c.	d.	e.	f.	g.	h.
4.)	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{36}$
	ad a.	ad b.	ad c.	ad d.	ad e.	ad f.	ad g.	ad h.
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$

Diese untern Bruchzahlen sind in ihrem Werthe gleich den obenstehenden; weil bey diesen Zähler und Nenner durch 4. verkleinert worden sind.

73te Frage. Man hätte nun z. B. mehrere Bruchzahlen zur Addition vor sich liegen, was wird hierin wohl zu beobachten seyn?

Antw. Wenn mehrere Brüche zu addiren sind, so muß man vorzüglich die Nenner derselben in Anschlag bringen, ob sie

a. eine gleiche Benennung, oder
b. eine ungleiche Benennung haben.

74te Frage. Gesetzt nun, sie seyen ad a. von gleicher Benennung, was ist zu thun?

Antw. In einem solchen Falle darf man nur die Zähler zusammenaddiren. Z. B.

a.	b.	c.
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{7}{8}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{5}$
$\frac{16}{8}$ | 2 mal.	$\frac{10}{7}$ | $1\frac{3}{7}$.	$\frac{10}{5}$ | 2 mal.

Erläuterung.

Durch die Zusammenzählung der Zähler dieser Brüche ad a. kommen $\frac{16}{8}$, folglich ein unächter Bruch heraus, der mit 8. in 16. dividirt 2 Ganze angab.

Die Bruchszähler ad b. hingegen haben zusammen $\frac{10}{7}$, daher ebenfalls einen unächten Bruch abgeworfen, deren Auflösung mit 7. in 10. dividirt, 1 Ganzes und zum Rest $\frac{3}{7}$ anzeigte.

Endlich die Bruchszähler ad c. zusammen $\frac{10}{5}$ oder 2 Ganze entzifferten.

75te Frage. Nun seyn aber die Nenner ad b. von ungleicher Benennung, was ist mit solchen anzufangen?

Antw. Wo ein solcher Umstand eintritt, muß eine Zahl aufgesucht werden, in der die ungleichartigen Nenner enthalten sind, und gleichsam als Faktoren derselben erscheinen, um eine gleiche Benennung dadurch herzustellen.

76te Frage. Das verstehe ich nun schon, aber es fragt sich weiter, wie dieses möglich zu machen ist?

Antw. Es läßt sich, um eine Gleichnamigkeit der Nenner herzustellen, dieses

a. dadurch am leichtesten effektuiren, wenn man die ungleichartigen Größen solcher Nenner miteinander oder durcheinander multiplizirt, oder wenn man

b. eine vorausgehende Vergleichung mit denselben anstellt. Z. B. Es sollen addirt werden

a. $\frac{3}{4} + \frac{4}{5}$ oder: b. $\frac{3}{4} + \frac{7}{8}$

ad a.

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{\text{a. } \overset{5}{\smile}15 + \overset{4}{\smile}16 \text{ b.}}{20.} = \text{c. } \frac{3(1}{2(0} \Big| \text{ d. } 1\frac{11}{20}$$

Oder auch so:

ad a.

$$\overbrace{}^{20}$$

$\frac{3}{4}$ | 5 = 15. a.

$\frac{4}{5}$ | 4 = 16. b.

d.

c. $\frac{3(1}{2(0}$ | $1\frac{11}{20}$

ad b.

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{8} = \frac{13}{8} \,\Big|\, 1\tfrac{5}{8}.$$

Oder auch so:

ad b.

$\frac{3}{4}$

$\frac{7}{8}$

$\frac{13}{8}$ | $1\frac{5}{8}$.

Erläuterung.

Bey dem Exempel ad a. mußte der Nenner 4. mit dem Nenner 5. wegen deren Ungleichnamigkeit multiplizirt werden, was eine gegenüber Rechts angesetzte Zahl von 20. gab, in diese mit 4. und mit 5. dividirt oben Links 5. und Rechts 4. zum Quotienten zeigte; sodann mit dem Zähler 3. den Quotienten 5. und mit dem Zähler 4. den Quotienten 4. multiplizirt, ad a. ein Produkt in der Zahl 15. und ad b. ein Produkt in der Zahl 16. abgeworfen hat; diese beiden Zahlen aber zusammenaddirt eine Summe ad c. von $\frac{31}{20}$ und durch die Division mit 20. in 31. ad d. $1\frac{11}{20}$ resultirte. Ein Beweiß demnach, daß wenn ich $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ zusammenaddire, mir 1 Ganzes und $\frac{11}{20}$ dadurch herauskommt.

Bey der zweyten vorgezeigten Art, wo es heißt: „Oder auch so" findet eines und dasselbe Verfahren statt, nur, daß diese zweyte Art in Hinsicht des Ansatzes begreiflicher seyn möchte.

Bey dem Exempel ad b. war die Vergleichung zwischen beyden Nennern 4. und 8. anzustellen, und mußte gefragt wer-

den: Ist 4. nicht ein Faktor aus 8.? — Die Antwort hierauf heißt ja, weil 4. in 8. 2mal enthalten war, folglich durfte bey dem ersten Bruch $\frac{3}{4}$ der Zähler 3. nur mit 2. vervielfältiget werden, jetzt waren es $\frac{6}{8}$, und 7. dazu genommen, kamen $\frac{13}{8}$ oder $1\frac{5}{8}$ heraus.

77te Frage. Wie nennt man diese Zahl, die bey der vorigen Berechnung durch die Multiplikation mit dem Nenner 4. und 5. ad a. aufgefunden worden ist, und in 20. besteht?

Antw. Eine solche Zahl nennt man den General- oder auch gemeinschaftlichen Nenner.

78te Frage. Und wie die einzelnen, in gleiche Verbindung gesetzte Nenner?

Antw. Diese heißt man Spezial- oder gemeine Nenner.

79te Frage. Was für eine praktische Regel ist denn festgesetzt worden, die bey allen dergleichen Bruchrechnungen mit Anwendung der Spezial-Nenner in den sogenannten General-Nenner beobachtet werden muß?

Antw. Wenn eine Addition mit Bruchzahlen einen General-Nenner erfodert, so besteht hierüber die allgemeine Regel darin:

a. daß ich mit jedem Spezialnenner zuerst in den Generalnenner dividire, dann

b. den Quotienten hievon mit dem Zähler multiplizire, und

c. das hiedurch herauskommende Produkt mir sodann einen neuen Zähler im Verhältniß mit dem Generalnenner giebt. Z. B.

General-Nenner.

	21.						Probe.	
		ad b.		ad c.	$\overset{7}{}$	ad c.		
Spezialnenner ad a.	$\frac{2}{3}$	7	=	14	=	$\frac{14}{\text{d. } 21}$	ist gleich	$\frac{2}{3}$
		ad b.		ad c.	$\overset{3}{}$	ad c.		
Detto ad a.	$\frac{3}{7}$	3	=	9	=	$\frac{9}{\text{d. } 21}$	=	$\frac{3}{7}$

Belehrung.

Man merke sich nur hiebey vorzüglich das: daß der Quotient 7. ad b. und der Quotient 3. ad b. die Auflösezahl zur Probehaltung der ursprünglichen Brüche seye; wenn man mit denselben in den neuen Zähler ad c. in 14. mit 7., und in 9. ad c. mit 3.; dann in den neuen Nenner (General = Nenner) 21. ad d. ebenfalls mit 7. und 3. dividirt; dann müssen die verlangten ursprünglichen Brüche herauskommen.

Nun sollen addirt werden:

a.

a.	$\frac{1}{2}$	12
b.	$\frac{1}{3}$	8
c.	$\frac{1}{4}$	6
d.	$\frac{1}{6}$	4
e.	$\frac{1}{8}$	3
f.	$\frac{1}{12}$	2
	$\frac{1}{24}$	1

$24 : \left| \begin{matrix} 36 \\ 12 \end{matrix} \right| 1\frac{1}{2}.$ $\underset{\smile}{12}$

$24 = \frac{1}{2}.$

Man sehe in der Auflösungs = Tabelle über die hergestellten Unterabtheilungen nach, und man wird in derselben finden, daß

ad a. $\frac{1}{2} = \frac{12}{24}$
= b. $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$
= c. $\frac{1}{4} = \frac{6}{24}$
= d. $\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$
= e. $\frac{1}{8} = \frac{3}{24}$ und
= f. $\frac{1}{12} = \frac{2}{24}$ ist,

daher nur die Zähler durchaus in Gedanken hätten in dieser Größe angenommen werden dürfen, welches man nie schwer finden wird, wenn die gehörige Uebung einmal da ist.

Z. B.

$$\overset{12}{\frac{1}{2}} + \overset{8}{\frac{1}{3}} + \overset{6}{\frac{1}{4}} + \overset{4}{\frac{1}{6}} + \overset{3}{\frac{1}{8}} + \overset{2}{\frac{1}{12}} + \overset{1}{\frac{1}{24}} = \frac{36}{24} \Big| \; 1\frac{12}{24} = \overset{12}{\frac{1}{2}}$$

Bemerkung.

Wenn auch gleichwohl das vorausgehende Additions = Exempel auf diese veränderte Art das nemliche Resultat geliefert hat, so kann ich doch nicht vorenthalten, daß, wenn ich nicht oben an die vergrößerten Bruchzähler gesetzt hätte, es vielmehr Schwierigkeit zu dessen Ausführung für den Nichtkundigen unterlegen wäre.

b.

Spezial-Nenner. 1680.

Spezial-Nenner	1680.	
$\frac{1}{2}$	840	= 840.
$\frac{2}{3}$	560	= 1120.
$\frac{3}{4}$	420	= 1260.
$\frac{4}{5}$	336	= 1344.
$\frac{5}{6}$	280	= 1400.
$\frac{6}{7}$	240	= 1440.
$\frac{7}{8}$	210	= 1470.
168(0 :	887(4 −47 (1680)	5 $\frac{474}{1680}$ (6) = $\frac{79}{280}$.

Durch die Division und Multiplikation entstandene Produkte, als neue Zähler im Verhältniß mit dem General-Nenner.

Vergleichung.

2. 3. 4. 5. 6. 7. 8
7
56 × 6.
336 × 5.
General-Nenner 1680.

Erläuterung.

Die angestellte Vergleichung der ungleichartigen Spezialnenner hat geheißen: 2 hebt sich in 4 auf,
3 = = = 6 =
4 = = = 8 = und wurden daher 2. 3. und 4. durchstrichen; dagegen die verbliebenen 5. 6. 7. und 8. mit einander vermehrt worden sind, woraus ein General-Nenner mit 1,680. entstanden ist.

Daß nun mit den Spezial-Nennern in den General-Nenner zu dividiren, und die herausgekommenen Quotienten mit den Zählern zu multipliziren waren, ist bereits früher erklärt worden, und es zeigte sich daher durch diese vorgenommene Addition eine Summe von $5\frac{474}{1680}$ (6) oder $\frac{79}{280}$.

Wiederholte Vergleichung mit

2 :	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
				5.	3.	7.	4.

$$
\begin{array}{r}
4. \\
7 \\ \hline
28 \\
3 \\ \hline
84 \\
5 \\ \hline
420 \times 2. \\ \hline
840.
\end{array}
$$

Dieser General = Nenner ist nur halb so groß, wie jener oben, weil mit 2. in 6. und 8. auch noch dividirt worden ist.

Berechnung.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8}$$

420	280	210	168	140	120	105
420	560	630	672	700	720	735

840.

$$\text{Summa } \frac{443(7}{84(0} \;\Big|\; 5\,\frac{237}{840} = \frac{79}{280}$$

Bemerkung.

Aus dieser wiederholt vorgenommenen Vergleichung ersieht man, daß die Abkürzung so lange fortgesetzt werden kann, als nur noch zwey Zahlen vorhanden sind, die sich abkürzen lassen; jedoch muß mit der Abkürzungs = Zahl, die hier 2. gewesen ist, zuletzt auch multiplizirt werden.

Um diesen Gegenstand so begreiflich zu machen, als es nur immer seyn kann, will ich noch einige Exempel hievon nachtragen, und zwar:

	48.	
$\frac{1}{3}$	16	= 16.
$\frac{3}{8}$	6	= 18.
$\frac{5}{6}$	8	= 40.
$\frac{7}{12}$	4	= 28.
$\frac{17}{24}$	2	= 34.
$\frac{19}{48}$	1	= 19.

48 : | 155 | $3\frac{11}{48}$.
 11
 48

Man wird finden, daß alle diese Spezial-Nenner in dem letzten, nemlich in 48. enthalten sind, und in demselben aufgehen; folglich durfte der Nenner 48. als General-Nenner angenommen werden.

Man sehe in der Auflösungs-Tabelle nach, da wird man alle diese vergrößerten Bruchzahlen, und zugleich finden, daß

$\frac{16}{48}$ gleich $\frac{1}{3}$
$\frac{18}{48}$ = $\frac{3}{8}$
$\frac{40}{48}$ = $\frac{5}{6}$
$\frac{28}{48}$ = $\frac{7}{12}$ und
$\frac{34}{48}$ = $\frac{17}{24}$ ist.

	240.	
$\frac{2}{3}$	80	= 160.
$\frac{3}{4}$	60	= 180.
$\frac{4}{5}$	48	= 192.
$\frac{5}{6}$	40	= 200.
$\frac{7}{8}$	30	= 210.
$\frac{5}{12}$	20	= 100.
$\frac{9}{16}$	15	= 135.
$\frac{13}{20}$	12	= 156.
$\frac{11}{24}$	10	= 110.

24(0: | 144(3 | $6\frac{1}{80}$.
 3
 240 = $\frac{1}{80}$

Vergleichung.

4.) ~~3. 4. 5. 6. 8. 12.~~ 16. 20. 24.
 4. 5. 6.
2.) 2. 5 × 3.
 15 × 2.
 30 × 8.

General-Nenner 240.

Nachdem mit den Faktoren 4. und 2. die Abkürzung vorgenommen worden ist; so durfte, weil bey den Abkürzungs-Zahlen 2 mal 4. gleich 8. ist, alsogleich das Produkt 30. mit 8. vervielfältiget werden, wodurch ein General-Nenner von 240. herauskam.

Nun folgen Uebungs-Beyspiele, die nach der gemachten Vorschrift berechnet werden wollen:

$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{48}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{19}{48}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{31}{48}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{28}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{35}{48}$
$\frac{7}{12}$	$\frac{37}{56}$	$\frac{23}{40}$	$\frac{11}{48}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{43}{48}$

ad c. Die Addition mit gemischten Zahlen betreffend.

80te Frage. Was ist eine gemischte Zahl?

Antw. Eine gemischte Zahl ist diejenige, der eine Bruchzahl beigefügt ist. Z. B.

$16\frac{1}{2}$ $23\frac{3}{4}$ $18\frac{5}{17}$ 2c.

81te Frage. Wenn nun dergleichen gemischte Zahlen zu addiren vorkommen sollten, was wird man dabey zu beobachten haben?

Antw. Man muß zuerst die Zahlen der Brüche zusammenaddiren, die Ganze hievon durch die geeignete Division ausheben, und solche den übrigen ganzen Zahlen einrechnen. Z. B.

	48.
$76\frac{1}{8}$	6 = 6.
$43\frac{2}{3}$	16 = 32.
$57\frac{5}{6}$	8 = 40.
$901\frac{7}{16}$	3 = 21.
$395\frac{11}{12}$	4 = 44.
$6188\frac{7}{8}$	6 = 42.
Summa $7663\frac{41}{48}$	48 : 185 | $3\frac{41}{48}$; −41; 48

Nachdem die Spezial-Nenner hier von der Art gewesen sind, daß eine Vergleichung unnöthig war; so durfte nur die Zahl 48. als General-Nenner angenommen werden.

2520.

$9\frac{1}{2}$	1260	=	1260.
$72\frac{2}{3}$	840	=	1680.
$83\frac{3}{4}$	630	=	1890.
$95\frac{4}{5}$	504	=	2016.
$706\frac{5}{6}$	420	=	2100.
$387\frac{6}{7}$	360	=	2160.
$8102\frac{7}{8}$	315	=	2205.
$6443\frac{8}{9}$	280	=	2240.

Summa $15903\frac{431}{2520}$ 252(0 : | 1555(1 | $6\frac{431}{2520}$
43
2520.

Vergleichung.

3.) 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

5. 2. 7. 8. 3.

2.) 5. — 7. 4 × 3.

12 × 7.

84 × 5.

420 × 6.

General-Nenner 2520.

Nun folgen Uebungs-Beyspiele:

$6\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{8}$	$17\frac{2}{5}$	$614\frac{1}{7}$
$4\frac{5}{6}$	$3\frac{3}{8}$	$28\frac{3}{5}$	$623\frac{2}{7}$
$7\frac{1}{3}$	$4\frac{5}{8}$	$219\frac{7}{10}$	$785\frac{3}{7}$
$8\frac{1}{6}$	$5\frac{7}{8}$	$321\frac{17}{20}$	$896\frac{4}{7}$
$9\frac{5}{12}$	$6\frac{3}{4}$	$7036\frac{31}{49}$	$1042\frac{5}{7}$
$10\frac{4}{7}$	$8\frac{1}{3}$	$8143\frac{15}{16}$	$2222\frac{4}{5}$
$12\frac{1}{7}$	$9\frac{2}{5}$	$9477\frac{5}{8}$	$3147\frac{8}{9}$
$14\frac{5}{8}$	$7\frac{3}{10}$	$10731\frac{8}{9}$	$5659\frac{2}{7}$
$17\frac{4}{9}$	$11\frac{7}{12}$	$12857\frac{13}{28}$	$6867\frac{9}{10}$

Achter Abschnitt.

Von der Subtraktion,

und zwar:

a. mit benamten,
b. = gebrochenen, und
c. = gemischten Zahlen.

---

ad a. Die Subtraktion mit benamten Zahlen betreffend.

82te Frage. Was Subtrahiren heißt, das weiß ich, aber bisher lernte ich diese Spezies nur mit unbenamten Zahlen kennen, daher ich zu erfahren begierig bin, wie man sich hierin zu benehmen hat?

Antw. Wie bey der Addition mit benamten Zahlen, daß man nemlich bey der niedrigsten Sorte des Geldes, des Gewichtes, oder wie immer, auch bey der Subtraktion den Anfang zu machen habe, und zwar:

Berechnung.

a. In Geld.

	495 fl.	48 kr.	3 pf.
	345 =	47 =	2 =
Rest:	150 fl.	1 kr.	1 pf.

b. In Gewicht.

316 Ztr.	27 Loth.	2 Quint.
109 =	16 =	1 =
207 Ztr.	11 Loth.	1 Quint.

c.

	7001 fl.	21 kr.	1 pf.
	4968 =	47 =	3 =
Rest:	2032 =	33 =	2 =
Probe:	7001 fl.	21 kr.	1 pf.

d.

7001 Ztr.	70 ℔.	29 Lth.	1 Qt.
4969 =	37 =	28 =	2 =
2032 =	33 =	— =	3 =
7001 Ztr.	70 ℔.	29 Lth.	1 Qt.

e.

	31025 fl.	12 kr.	— pf.
	9876 =	49 =	2 =
Rest:	21148 =	22 =	2 =
Probe:	31025 fl.	12 kr.	— pf.

f.

		32	
43210 Ztr.	11 ℔.	23 Lth.	2 Qt.
34567 =	79 =	31 =	3 =
8642 =	31 =	23 =	3 =
$\frac{1(11}{1\ 00}$	1 Ztr. $\frac{55}{32}$	1 ℔. $\frac{6}{4}$	1 Lth.
43210 Ztr.	11 ℔.	23 Lth.	2 Qt.

g. In Getreid.

	3072 Schäffel.	5 Metz.	1 Vrtl.	— Mäßl.	1 Dreiß.
	1987 "	1 "	1 "	5 "	1 "
Rest:	1085 "	3 "	1 "	3 "	— "
Probe:	3072 Schäffel.	5 Metz.	1 Vrtl.	— Mäßl.	1 Dreiß.

Nun folgen einige Exempel als Probe der Addition von der 57ten Frage:

ad b.

	767278 fl.	15 kr.	7 hl.
	94780 "	24 "	2 "
Rest:	672497 "	51 "	5 "
Probe:	767278 fl.	15 kr.	7 hl.

ad e.

26460 Ztr.	82 ℔.	20 Lth.	2 Qt.
16892 "	9 "	6 "	3 "
9568 "	73 "	13 "	3 "
26460 Ztr.	82 ℔.	20 Lth.	2 Qt.

ad c.

	46169 fl.	8 kr.	1 pf.
	41837 "	33 "	3 "
Rest:	4331 "	34 "	2 "
Probe:	46169 fl.	8 kr.	1 pf.

ad d.

5626 Ztr.	— ℔.	— Lth.	— Qt.
5258 "	76 "	12 "	1 "
367 "	23 "	19 "	3 "
5626 Ztr.	— ℔.	— Lth.	— Qt.

Erläuterung.

Bey der Subtraktion mit unbenamten Zahlen wurde schon die Lehre gegeben, daß, wenn bey dem Subtrahend eine Ziffer kleiner als jene beym Subtraktor seye, zu der nächsten Zehnerzahl Links Zuflucht genommen, und ein Zehner entlehnt werden müsse.

Bey dieser in Frage befangenen Subtraktion mit benamten Zahlen hingegen wolle man vorzüglich nur darauf Bedacht nehmen, wenn bey der niedrigsten Sorte in Geld angefangen wird, und es lassen sich z. B. bey dem Exempel ad c. oben 3 Pfenninge von 1 Pfenning nicht abziehen; so muß ebenfalls das Entlehnen zu der nächst höhern Sorte, nemlich der Kreutzer, als Mittel dienen, daß von 1 kr. oder 4 pf., oder vielmehr hier von 5 pf. abgezogen werden kann. Das muß aber Alles in Gedanken geschehen; — und nachdem nun gesagt werden konnte: 3 pf. von 5 pf. bleiben 2 pf., weiß ich, daß 1 kr. von 21 kr. geborgt wurde. Von den verbliebenen 20 kr. sollen aber 47 kr. in Abzug gebracht werden, daher 1 fl. oder 60 kr. ebenfalls zu entlehnen war; diese 60. zu 20. gerechnet geben $\frac{60}{20}$ = 80 kr. Jetzt war Möglichkeit vorhanden, daß abgezogen und gesagt werden konnte: 7. von 10. bleibt 3., dann 4. von 7. bleibt 3., was die 33 kr. zum Rest gab.

Ueberhaupt muß ich bey dieser Gelegenheit bemerken, daß, in so ferne man 1 fl., vielmehr 60 kr. zu entlehnen hat, man sich um diese Null in der Einheit nicht viel oder gar nichts darum bekümmern wolle, sondern, wenn 1. 2. 3. Zehner von den Kreutzern, die zum Abziehen zu gering sind, sich vorfinden sollten, so wird in Gedanken 6. zu 1. 2. oder zu 3. ꝛc. addirt, alsdann kann ich sagen: 4. von 7. oder von 8. oder von 9. ꝛc. bleibt 3. oder 4. oder 5., das sind, wie bey dem vorliegenden Falle 3 Zehner, daher mit der gleich angesetzten Einheit 3. als Rest 33 kr., wie oben gesagt, verblieben sind.

Bey dem Exempel ad f. sollten 5 Quint von 2. abgezogen werden, was nicht möglich war; daher 1 Loth, das 4 Quint giebt, zu 2. gerechnet, mir 6 Quint gab, und sodann gesagt werden konnte: 3. von 6. bleibt 3.; nun sollten 31. von 22 Loth abgezogen werden, zu welchen 1 ℔., nemlich 32 Loth, die oben angesetzt wurden, man zu entlehnen hatte, wodurch 54 Loth zusammen herauskamen, wovon über Abzug der 31 Loth 23. zum Rest verblieben sind.

Was war nun ferner mit den 10 ℔. anzufangen, von denen 79 ℔. abgezogen werden sollten? — Hiezu 1 Zentner, der 100 ℔. hält, entlehnen, $\frac{100}{10}$ ℔. = 110 ℔. Jetzt wurde man in den Stand gesetzt zu sagen: 9 von 10 bleibt 1.
7 = 10 = 3. Dann ferner bey den Zentnern, wovon 1 Zentner entlehnt worden ist:

7	=	9	=	2.	Rest: 8,642 Zentner.
6	=	10	=	4.	
5	=	11	=	6.	
4	=	12	=	8.	
3	=	3	=	—	

Was die zu machende Probe über dergleichen Exempel betrifft, ist hiezu die Addition erfoderlich, wovon jedoch die geeignete Belehrung bey der besagten Addition bereits gegeben worden ist, daher eine Wiederholung derselben unnöthig wäre.

Nun folgen Uebungs-Beyspiele:

315 fl.	23 kr.	1 pf.	
281 =	46 =	3 =	
Rest:			

407 Ztr.	10 ℔,	17 Lth.	1 Qt.
298 =	39 =	24 =	3 =

	2106 fl.	7 kr.	2 pf.	8134 Ztr.	29 ℔.	21 Lth.	— Qt.
	987 „	16 „	3 „	3927 „	84 „	31 „	3 „
Rest:							

	365 Schäffel.	5 Metz.	1 Vrtl.	1 Mäßl.	— Dreiß.
	189 „	4 „	1 „	7 „	1 „
Rest:					

ad b. Die Subtraktion mit gebrochenen Zahlen betreffend.

83te Frage. Was wird man wohl bey der Subtraktion mit Bruchzahlen zu beobachten haben?

Antw. Das Nemliche, was bey der Addition in Anregung gebracht worden ist, daß man auf die gleiche Benennung der Bruchs-Nenner am Allerersten zu sehen sich angelegen seyn lassen müsse. Z. B.

Berechnungen.

Erste Art.

a.

Subtrahend $\frac{3}{4}$

Subtraktor $\frac{1}{4}$

$\frac{2}{4} \overset{2}{=} \frac{1}{2}$ Rest.

b.

$\frac{5}{8}$

$\frac{3}{8}$

$\frac{2}{8} \overset{2}{=} \frac{1}{4}$ Rest.

Zweyte Art.

ad a.

$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \overset{2}{=} \frac{1}{2}$ Rest.

ad b.

$\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} \overset{2}{=} \frac{1}{4}$ Rest.

c.

$$\frac{5}{6}$$
$$\frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{6} \text{ Rest.}$$

ad c.

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \text{ Rest.}$$

Wenn ich weiß, daß $\frac{2}{3}$ so viel als $\frac{4}{6}$ sind, so ist ein solcher Abzug leicht zu machen; nemlich: ich darf nur sagen: $\frac{4}{6}$ von $\frac{5}{6}$ bleibt $\frac{1}{6}$.

d.

$$\frac{3}{4}$$
$$\frac{5}{8}$$
$$\frac{1}{8} \text{ Rest.}$$
$$\frac{6}{8} \overset{2}{\smile} \frac{3}{4} \text{ Probe.}$$

ad d.

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{1}{8} \text{ Rest} + \frac{6}{8} \overset{2}{=} \frac{3}{4} \text{ Probe.}$$

Hier war der nemliche vorbesagte Fall: Ich mußte $\frac{3}{4}$ für $\frac{6}{8}$ annehmen, dann konnte ich sagen: $\frac{5}{8}$ von $\frac{6}{8}$ bleibt mir $\frac{1}{8}$.

e.

112.

$$\frac{13}{16} \mid 7 = 91. \text{ Subtrahend.}$$
$$\frac{4}{7} \mid 16 = 64. \text{ Subtraktor.}$$
$$\frac{27}{112} \text{ Rest.}$$

ad e,

$$\frac{13}{16} - \frac{4}{7} = \frac{\overset{7}{91} - \overset{16}{64}}{112} = \frac{27}{112} \text{ Rest.}$$

Erläuterung.

Dieses Exempel ad e. hat zum ersten Spezial-Nenner 16. und zum zweyten desselben 7. gehabt. Da war nun nichts anders zu thun, um eine gleiche Benennung, vielmehr einen General-Nenner herzustellen, als daß diese zwey Zahlen mit einander vervielfältiget werden mußten, und es kam hiedurch ein General-Nenner in der Zahl 112. hervor, in welchen mit 16. und mit 7. dividirt, und diese Quotienten 7. und 16. mit dem Zähler 13. und 4. zu multipliziren waren; wodurch zum neuen Subtrahend 91. und zum neuen Subtraktor 64. herauskamen. Diese von jener Zahl abgezogen, sich ein Rest von $\frac{27}{112}$ zeigte. Eine Differenz, zum Beweis, daß $\frac{13}{16}$ gegen $\frac{4}{7}$ um so viel größer seye.

Die Berechnung nach der zweyten Art gab zwar das gleichlautende Resultat zum Rest an; allein, die Lage desselben möchte wohl nicht so leicht zu begreifen seyn, wie jene der ersten Art; wenn, besonders jene ersten Produkte, die sich durch die Division entzifferten, wie sie hier oben mit dem Quotienten 7. und 16. angesetzt und eingeklammert worden sind, nicht angezeigt werden, was in den mehresten Rechenbüchern ein Hauptgebrechen ist, und einen wesentlichen Abgang zum Selbst-Unterrichte betrifft.

Weitere Berechnung.

Erste Art.

f.

432.

$\frac{37}{48}$ | 9 = 333. Subtrahend.

$\frac{4}{9}$ | 48 = 192. Subtraktor.

$\frac{141.}{432} \Big| \frac{47}{144}$ Rest. (3)

ad f. Zweyte Art.

$$\frac{37}{48} - \frac{4}{9} = \frac{\overset{9}{333} - \overset{48}{192}}{432} = \frac{141}{432} = \frac{47}{144} \text{ Rest.} \quad (3)$$

Belehrung.

Stellt man hier mit den Spezial-Nennern eine Vergleichung an, so wird man finden, daß ein viel kleinerer General-Nenner anzuwenden ist. Z. B.

ad f.

144.

$\frac{37}{48}$ | 3 = 111.

$\frac{4}{9}$ | 16 = 64.

$\frac{47.}{144.}$ Rest.

Vergleichung.

3.) 48. 9.

16. × 3.

48 × 3.

144.

g.

1216.

$\frac{53}{64}$ | 38. 424
159
= 2014.

$\frac{13}{38}$ | 64

192 = 832 } * zur Probe zusammenaddirt.
1182 Rest.
1216

38 : | *2014 | $\frac{53}{64}$ Probe.
11

Vergleichung.

2.) $\frac{64.}{32.}$ — $\frac{38.}{19.}$
32. × 19.
288.
608. × 2.
1216. General = Nenner.

Erläuterung.

Wenn auch der Zähler mehrziffrichte Zahlen ausspricht, so wird die Berechnung mit Brüchen dennoch nicht erschwert, besonders nach dieser vorgezeigten ersten Art, wo mit dem Quotienten 38. der Zähler 53. und mit dem Quotienten 64. der Zähler 13. zu multipliziren war, was auch durch einen besondern Ansatz nicht mehr und nicht weniger abgeworfen hätte, als 2,014. und 832.

Die Probe über eine solche Subtraktion zu machen, muß man den Rest mit dem Subtraktor, wie bey ganzen Zahlen zusammenaddiren, und es soll, vielmehr es muß der Subtrahend hiedurch herauskommen, wie sich derselbe hier mit 2,014. oder mit 38. darein dividirt, mit $\frac{53}{64}$ richtig zeigte.

h.

335,533.

$\frac{234}{517}$ | 649 2596
1947
1298
= 151866.

$\frac{107}{649}$ | 517
3619 = 55319.
96547. Rest.
335533.

Seitenberechnung.

649 × 517.
4543
3245
335533. Generalnenner.

Bemerkung.

Man versuche nur selbst dieses und mehr dergleichen Exempel einer solchen Subtraktion mit Bruchzahlen, und mache auch die Probe darüber, dann wird sich die bisher bey so Manchem vermeinte Schwierigkeit, mit Brüchen zu rechnen, von selbst heben.

Erläuterung.

Um den General-Nenner durch die Multiplikation zu erhalten, mußte der Kürze wegen bey der Zahl 649. mit 517., d. i. mit der Einheit 7. um eine Ziffer vorwärts, und mit der Hunderterzahl 5. um eine Ziffer gegen die obere Zahl rückwärts, solche in Vollzug gesetzt werden, weil die Zehnerzahl 1. gewesen ist.

Die Multiplikation mit 517. und 107. hingegen vorzunehmen, durfte nur um zwey Ziffern vorwärts gerückt werden, weil in der Mitte eine Null, und in der Hunderterzahl die Ziffer 1. war.

Nun folgen Uebungs-Beyspiele.

a.	b.	c.	d.	e.	f.
$\frac{11}{12}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{15}{28}$
$\frac{7}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{7}$

Erläuterung.

Wenn man bey diesen Uebungs-Beyspielen das erste Exempel ad a. zu beurtheilen sucht, d. h. die Spezial-Nenner gegen einander vergleicht; so wird man hierin finden, daß ein General-Nenner aufgefunden werden kann, ohne dieselben mit einander zu multipliziren, weil in der Zahl 36. sowohl 12. als 9. enthalten ist.

Bey dem zweyten Exempel ad b. tritt der nemliche Fall ein, und kann hier die Zahl 24. in Anwendung gebracht werden.

Bey dem Exempel ad c. muß mit 5. und 8. gleichwohl multiplizirt werden, um den General- oder gemeinschaftlichen Nenner zu erhalten.

Bey dem Exempel ad d. liegt derselbe in der Zahl 48. schon vor, indem 16. in 48. 3 mal begriffen ist.

Bey dem Exempel ad e. ist die Multiplikation vorzunehmen; und bey dem Exempel ad f. ist die Zahl 28. der General-Nenner.

ad c. Die Subtraktion mit gemischten Zahlen betreffend.

84te Frage. Wie hat man sich bey einer solchen Subtraktion zu verhalten?

Antw. Daß man zuerst die angehängten Brüche von einander abziehe, und dann mit den ganzen Zahlen die Subtraktion vornehme. Z. B.

$43\frac{1}{2}$ von $69\frac{5}{6}$ ꝛc.

a.

$69\ \frac{5}{6}$

$43\ \frac{1}{2}\quad \overset{2}{\smile}$

$26\ \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ Rest.

Sobald ich weiß, daß $\frac{1}{2}$ mir $\frac{3}{6}$ giebt, so sage ich nur $\frac{3}{6}$ von $\frac{5}{6}$ bleiben $\frac{2}{6}$, oder mit 2. in Zähler und Nenner dividirt, giebt $\frac{1}{3}$, wie das Gleichheits-Zeichen bey der Berechnung mit zwey Querstrich gezeigt hat; das will so viel sagen: daß $\frac{2}{6}$ gleich ist $\frac{1}{3}$.

b.

16.

$97\ \frac{1}{8}\ |\ 2 = 2 + 18.$

$58\frac{5}{16}\ |\ 1 = 5 = 5$ } zur Probe zusammenaddirt.

$38\ \frac{13}{16}$ $\qquad \frac{13}{16}$ } Rest.

Probe: $97\ \frac{1}{8}$ $\qquad \frac{18}{16}\ |\ 1\ \frac{2}{16} \overset{2}{\smile} = \frac{1}{8}.$

Erläuterung.

Nachdem bey dem Subtrahend die Bruchzahl kleiner war, als jene bey dem Subtraktor, so mußte, um abziehen zu können, ein Ganzes entlehnt werden, das mit 16. zu 2. zu addiren war. Nun konnte 5. von 18. abgezogen werden, und der Rest hat geheißen: $38\frac{13}{16}$. Diesen Rest zum Subtraktor addirt, kam die Probe richtig heraus.

c.

$201\ \frac{17}{24}$

$194\ \frac{5}{8}\quad \overset{2}{\smile}$

$--7\ \frac{2}{24} = \frac{1}{12}.$

Hier braucht ad c. kein General-Nenner angesetzt zu werden; denn, wenn ich weiß, daß $\frac{5}{8}$ nach der bekannten Auflösungs-Tabelle der hergestellten Unter-Abtheilungen $\frac{15}{24}$ beträgt, so durfte nur 15. von 17. abgezogen werden, und dadurch wurde eine Vielschreiberei erspart.

Ueberhaupt bin ich der Meinung, wenn im Rechnen nur eine Ziffer, jedoch ohne Nachtheil der Berechnung, erspart werden kann, so sollte man es thun.

d.	
318 $\frac{15}{26}$	Da hier ad d. das Verhältniß der beyden Spezial=Nenner sehr leicht zu erkennen war, weil 2 mal 13. zusammen 26. ausmacht; so durfte nur bey dem Zähler 7. gesagt werden: 2 mal 7. ist 14., von obigen 15. bleibt $\frac{1}{26}$.
299 $\frac{7}{13}$	
19 $\frac{1}{26}$	

85te Frage. Könnte bey dieser Abtheilung der Subtraktion nicht auch recht füglich die Zeitrechnung zugleich in Anwendung gebracht werden?

Antw. Warum denn nicht, es kommt nur darauf an, was zu wissen von einer Zeit zur andern verlangt wird.

86te Frage. Ich möchte nun recht gerne wissen, wie lange es seit dem Einsturze der Isar=Brücke in München ist, welcher unglückliche und schauderhafte Augenblick der 13te September 1813 Abends $\frac{3}{4}$ nach 6 Uhr war, bis zu jenem Zeitpunkte, wo am 5ten Juli 1817 Abends $\frac{1}{4}$ nach 6 Uhr ein ganz unverhoffter fürchterlicher, mit einem schrecklichen Sturm begleiteter Schauer (Hagel) sich über diese Stadt und Umgegend gezogen, und des besagten Hagels entlediget hatte, welcher auf der Wetterseite alle Fenster ohne Pardon zersplitterte? — Dann ferner von dieser Zeit angefangen, bis am 3ten Mai 1828 Nachmittag 2 Uhr 11 Minuten, gerade damals, wie Se. Majestät, mein allergnädigster König und Herr, über die neuerbaute sehr schöne Isarbrücke in München gefahren sind? — Wie wird hierüber der Ansatz zu machen seyn?

Antw. Bey einer solchen Zeitrechnung muß jedesmal das schon verflossene Jahr, und von dem laufenden nur die treffenden, aber ebenfalls bereits vorübergegangenen Monate, Tage und Stunden ꝛc. angesetzt werden, dann läßt sich so ziemlich die Größe des zu wissen verlangten Zeitraumes angeben, was man auch sehr begreiflich finden wird; denn, wie könnte man das Jahr, von dem erst Monate ꝛc. verflossen sind, als Ganz annehmen? — Mit dem neuen Jahr beginnt es, weil es an dem ersten Tag desselben anfängt, daher ich es aus diesem Grunde nie für Regelmäßig halten kann, eine dergleichen Subtraktion in einem andern Sinne vornehmen zu wollen, das vielleicht doch schon öfters geschehen ist.

Wir haben nun

a. in der zweyten Epoche 1817. geschrieben, und der Tag des Schreckens war der 5te Juli gewesen, folglich sind seit Christi Geburt bis dahin 1816 Jahre, 6 Monate, 4 Tage und 18 $\frac{1}{4}$ Stunden verflossen, von welchen abgezogen werden sollen 1812 Jahre, 8 Monate, 12 Tage und 18 $\frac{3}{4}$ Stunden. Und

b. in der dritten Epoche 1828. ist dieser festliche Tag der 3te May gewesen; demnach muß gesagt werden: 1827 Jahre, 4 Monate, 2 Tage, 14 Stunden, 11 Minuten.

87te Frage. Wie werden nun die Unterschiede oder die Differenzien hievon aussehen?

Antw. Da angenommen ist, daß der bürgerliche Tag um Mitternacht nach 12 Uhr anfängt, und von einer Mitternacht zur andern 24 Stunden verfließen; so sind diese Differenzien folgendermassen aufzusuchen:

Berechnung ad a.

		12	30	24 4
	1816 Jahre.	6 Monate.	4 Tage.	18 $\frac{1}{4}$ Stunden.
	1812 =	8 =	12 =	18 $\frac{3}{4}$ =
Unterschied:	3 Jahre.	9 Monate.	21 Tage.	23 $\frac{2}{4}$ = $\frac{1}{4}$ Stunden. (2)
		$\frac{18}{12}$ 1.	$\frac{3(4}{3(0}$ 1.	$\frac{42}{24}$ 1. $\frac{5}{4}$ 1.
Probe:	1816 Jahre.	6 Monate.	4 Tage.	18 $\frac{1}{4}$ Stunden.

Berechnung ad b.

	12	30	24	60
1827 Jahre.	4 Monate.	2 Tage.	14 Stund.	11 Minut.
1816 =	6 =	4 =	18 =	15 =
10 Jahre.	9 Monate.	27 Tage.	19 Stund.	56 Minut.

88te Frage. Im Jahre 1775. den 23ten Juli Morgens um 7 $\frac{1}{2}$ Minuten nach 5 Uhr kam der Johann Starr auf die Welt, der nun gerne wissen möchte, wie alt er bis den 21ten August 1823. Vormittags 11 Uhr, 5 $\frac{1}{4}$ Minuten darüber, geworden seye?

Antw. Diese Frage schließt sich an die vorigen an, und ist deren Auflösung kein schwieriges Problem, nemlich:

			30		60 4
	1822 Jahre.	7 Monate.	20 Tage.	11 Stund.	$5\frac{1}{4}$ Minut.
	1774 „	6 „	22 „	5 „	$7\frac{1}{2}$ „
	48 Jahre.	— Monate.	28 Tage.	5 Stund.	$57\frac{3}{4}$ Minut.
			$\frac{5(0}{3(0}$ | 1.		$\frac{6(5}{6(0}$ | 1. $\frac{5}{4}$ | 1.
Probe:	1822 Jahre.	7 Monate.	20 Tage.	11 Stund.	$5\frac{1}{4}$ Minut.

Bemerkung.

Daß bey solchen Exempeln die Auflösezahlen oben anzusetzen für gut gefunden wurde, ist deßwegen meines Erachtens nothwendig, weil es, besonders für Anfänger im Rechnen, doch schwer halten würde, dergleichen Abzüge in Gedanken machen zu wollen.

Ferner ist aus der Subtraktion dieses letzten Exempels wahrzunehmen: daß der oben besagte Johann Starr im Jahre 1823. zu der vorhin bestimmten Zeit ein Alter von 48 Jahren, — Monat, 28 Tagen, 5 Stunden und $57\frac{3}{4}$ Minuten erreicht habe.

Nun folgen Uebungs-Beyspiele:

$25\frac{5}{7}$. $610\frac{1}{8}$. $721\frac{2}{5}$. $3004\frac{8}{9}$. $8103\frac{3}{4}$.
$18\frac{2}{3}$. $369\frac{4}{5}$. $456\frac{7}{12}$. $987\frac{5}{6}$. $7095\frac{23}{24}$.

$10543\frac{7}{11}$. $23\frac{5}{8}$. $57\frac{12}{13}$. $301\frac{2}{3}$.
$8654\frac{19}{22}$. $6\frac{1}{9}$. $8\frac{4}{7}$. $96\frac{7}{8}$.

Neunter Abschnitt.

Von der Multiplikation und Division,

und zwar:

a. mit benamten,
b. = gebrochenen, und
c. = gemischten Zahlen.

---

ad a. Die Multiplikation und Division mit benamten Zahlen betreffend.

89te Frage. Ich möchte fast fragen, warum wird hier die Multiplikation und die Division unter einen Abschnitt gebracht?

Antw. Die Ursache hievon liegt sehr natürlich vor, und besteht darin: damit man sogleich die Probe über jedes Multiplikations- und Divisions-Exempel gegenseitig machen könne, woran sehr Vieles gelegen ist.

Bemerkung.

Mag wohl auch ein Rechner einer von den Geübtesten seyn, und sich selbst das größte Vertrauen zumuthen, als könne er bey Ausarbeitung von Rechnungs-Exempeln gar nicht fehlen; so erhält derselbe ohne die zu machende Probe doch keine wahre Ueberzeugung über die Richtigkeit der Rechnung (denn es fehlt ihm die Gewißheit hiezu), daher dessen nur eingebildete Kunst nie nachgeahmet werden wolle.

90te Frage. Wie wird
a. die Multiplikation, und
b. die Division mit benamten Zahlen verrichtet?

Antw. ad a. Die Multiplikation wird Rechts bey der kleinsten Benennung von Geld, Gewicht s. a. bis zur größten Benennung; dann

ad b. die Division von der linken zur rechten Hand vorgenommen.

Es sollen nun z. B.

a.	an Geld 6 fl. 43 kr. 2 pf. mit	5.	multiplizirt, und jedesmal das heraus=komende Produkt dividirt werden.
b.	„ Gewicht 7 Ztr. 19 ℔. 23 Lth. 2 Qt. mit .	6.	
c.	„ Getränkmaß 2 Fuder, 5 Ohm, 1 Eim. 37 Maß, 3 Quart mit	7.	
d.	„ Getreidmaß 9 Sch. 4 Mtz. 1 Vrt. 5 Mßl. 1 Dr.	8.	
e.	„ „ 605 „ 5 „ 1 „ 7 „ 1 „	231.	

Berechnung ad a. in Geld.

Multiplikand. Multiplikator.

6 fl. 43 kr. 2 pf. × 5.

21(7 / 6(0 | 3 fl. — 10 / 4 | 2 kr.

5 : | 33 fl. 37 kr. 2 pf. Produkt. | 6 fl. 43 kr. 2 pf.

-3 × 60.

| 217 | 43 kr.
12 × 4.
| 10 | 2 pf.

Probe:

Bey Auflösung des Rests mit 3 fl. durch 60. waren die 37 kr. und bey der fernern Auflösung der verbliebenen 2 kr. durch 4. waren die 2 Pfenning miteinzurechnen.

Berechnung ad b. in Gewicht.

7 Ztr. 19 ℔. 23 Loth. 2 Quint. × 6.

1(18 / 1(00 | 1 Ztr. — 141 / 32 | 4 ℔. — 12 / 4 | 3 Lth.

6 : | 43 Ztr. 18 ℔. 13 Loth. — Quint. | 7 Ztr.

1
100
| 118 | 19 ℔.
54 × 32.
| 141 | 23 Lth.
23 × 4.
| 12 | 2 Qt.

Probe:

7 Ztr. 19 ℔. 23 Lth. 2 Qt.

Berechnung ad c. im Getränkmaß.

2 Fuder. 5 Ohm. — Eimer. 37 Maß. 3 Quart × 7.

7 : | 19 „ 5 „ 4 „ 24 „ 1 „ | 2 Fuder.

5 × 6.
| 35 | 5 Ohm.
— Eimer.
4 × 60.
| 264 | 37 Maß.
55 × 4.
| 21 | 3 Quart.

Probe:

2 Fuder, 5 Ohm. — Eimer. 37 Maß. 3 Qrt.

Berechnung ad d. im Getreidmaß.

9 Schäfl. 4 Metz. 1 Vrtl. 5 Mäßl. 1 Dreiß. × 8.

8 : | 78 = 2 = 1 = 4 = — = | 9 Schäfl.
−6 × 6.

| 38 | 4 Metz.
| −6 | × 2.

| 13 | 1 Vrtl.
| −5 | × 8.

| 44 | 5 Mäßl.
| −4 | × 2.

| 8 | 1 Dreiß.

Probe:

9 Schfl. 4 Mtz. 1 Vrtl. 5 Mäßl. 1 Dreiß.

Berechnung ad e. ebenfalls in Getreid.

Das 605 Schl. 5 Mtz. 1 Vrtl. 7 Mßl. 1 Dr. a. 231

11fache. i. 6665 = h. 5 = g. 1 = f. 2 = e. 1 = × 11. b.

77 = 46661 = 3 = 1 = 1 = 1 = × 7. c.

231 : = | 139984 = 4 = 1 = 4 = 1 = × 3. d. | 605 Sch.
−1329 × 6.
−2

| 1378 | 5 Metz.
| −223 | × 2.

| 447 | 1 Vrtl.
| 216 | × 8.

| 1732 | 7 Mßl.
| −115 | × 2.

| 231 | 1 Dreiß.

Probe:

605 Sch. 5 Mtz. 1 Vrtl. 7 Mäßl. 1 Dr.

Erläuterung.

Nur über dieses Multiplikations-Exempel ad e., und die gemachte Probe hierüber werde ich allein eine Belehrung abgeben, in dem Vertrauen, wer sich einmal mit Berechnung eines solchen, jedoch nur scheinbar schwierigen Exempels zu helfen weiß, auch im Stande ist, die vorangehenden vier Exempel sehr leicht zu berechnen.

Die Zahl 231. ad a. wurde zum Multiplikator angenommen, und als Verhältnißzahl aus derselben die Faktoren ad b. mit 11.
= c. = 7. und
= d. = 3. folgendermassen aufgesucht;

ad b.			ad c. 7	ad d.
11 :	231 1	21 mal.		3 mal.

Nun mußte zuerst mit dem Faktor 11. ad b., als dem größten derselben in 1 Dreißiger multiplizirt werden, wodurch sehr natürlich 11 Dreißiger herauskamen, in diese mit der Erhöhungszahl 2. in Gedanken dividirt, 5 Mäßlein, und zum Rest 1 Dreißiger ad e. abgeworfen hat.

Nun weiter 11 mal 7 Mäßlein 77. und den vorigen Rest 5. miteingezogen, zusammen 82 Mäßlein sich entzifferten. Mit der Erhöhungszahl 8. darein dividirt, 10 Viertel gab, und 2 Mäßlein ad f. zum Rest verblieben sind. Ferner 11 mal 1 Viertel, und vorige 10 Viertel dazu genommen, 21 Viertel herauskamen, in diese mit 2. dividirt, 10 Metzen sich zeigten, und 1 Viertel als Rest ad g. verblieb.

Nun mit 5 Metzen: 11 mal 5 ist 55. und vorige 10 Metzen dazu, gaben 65 Metzen, in diese mit 6. dividirt (ebenfalls in Gedanken) 10 Schäffel herauskamen, dann zum Rest ad h. 5 Metzen verblieben sind.

Jetzt waren noch 605 Schäffel mit 11. in Gedanken zu multipliziren, und die vorhin herausgekommenen 10 Schäffel miteinzuziehen.

Z. B. 605 $\times$ 11.
605
10 miteinzurechnen.
Probe: 6665.

605 $\times$ 11.
6665. ad i.

Man sagt hier nur 5. und setzt die Einheit 5. heruntsr, dann diese 5. noch einmal genommen, und von obigen 10. die Zehnerzahl 1. dazugenommen, giebt 6. und ist in die Zehnerzahl herunterzusetzen gewesen, sofort die Hunderterzahl 6. ebenfalls heruntergesetzt, und noch einmal 6. in die Tausenderzahl, gab zusammen 6,665. ad i., dadurch kam das 11fache obiger 605 Schäffel, 5 Metzen, 1 Viertel, 7 Mäßlein, 1 Dreißiger heraus.

Bemerkung.

Diese gemachte Aufklärung über die Multiplikation mit dem Faktor 11. ad b. glaube ich, sollte nicht nur erschöpfend genug seyn, daß der eigentliche Vortheil hievon richtig aufgefaßt werden könnte; son-

dern, es möchte solche auch dazu dienen: daß über die weiter erfolgte Multiplikation mit den beyden Faktoren 7. ad c. und 3. ad d. eine dergleichen umständliche Detailirung nicht mehr nothwendig seyn werde. Daher ich zu der vorgenommenen Division, vielmehr zu der gemachten Probe über fragliches Multiplikations-Exempel übergehen, und als

Erläuterung

hierauf anwenden will:

Die Zahl 231. ist der Divisor, durch welchen aus dem Dividend 139,984 Schäffel, 4 Metzen, 1 Viertel, 4 Mäßlein, 1 Dreißiger die treffenden Theile auszuheben sind, wovon jedoch, der Kürze wegen, nur die Schäffelzahl ausgehoben werden soll, weil die weitere Verfahrungsart ganz einfach vorliegt; z. B.

```
231 : | 1399 |...6  \
          138 ...0   > Quotient 605 Schäffel.
         1384..5    |
          229      /
```

Die erste Zahl	des Dividends	war		1,399.
" zweite neue Zahl	"	"	"	138.
" dritte	" " "	"	"	1,384.

Besondere Bemerkung.

Wird man diese verkürzte Divisionsart bey Ausarbeitung solcher, oder auch noch viel größerer Exempel nicht für sehr zweckmäßig und vortheilhaft finden mögen?

Würde man es daher nicht für rathsam halten wollen, diese Art der Jugend bey Zeiten einzupflanzen suchen, um eine wahrhaft unnöthige Vielschreiberei damit zu ersparen?

Indessen, da diese bloße Meinung aus eigener Erfahrung hergeleitet ist; so will ich nichts desto weniger damit zudringlich seyn, sondern es dem Ermessen und Gutdünken einem Jeden selbst überlassen.

91te Frage. Da ich nun über diese fünf Multiplikations-Exempel die Probe durch die Division machen lernte, so möchte ich jetzt auch im umgekehrten Falle die Probe über Divisions-Exempel durch die Multiplikation kennen lernen, und wie man dabey zu verfahren hat?

Antw. Wie bey jeder andern Probe. Z. B. Es solle

a. aus	301 fl. 1 kr. 3 pf. der	13te	Theil aufgesucht werden.
b. "	457 Ztr. 39 ℔. 3 Vierl. 7 Lth. 1 Qt. . .	31te	
c. "	87 ℔. 9 Unz. 1 Lth. 3 Drachm. 2 Scrup. 15 Gr.	14te	
d. "	17 ℔. 1 Mark. 21 Kar. 3 Gran. 2 Gren. .	41te	
e. "	27,005 fl. 21 kr. 1 pf.	378te	
f. "	392,864 Ztr. — ℔. 25 Lth. 3 Qt.	4,896te	

Berechnung ad a. in Geld.

Facit:

13 : | 301 fl. 1 kr. 3 pf. | 23 fl. 9 kr. $1\frac{6}{13}$ pf. × 13.

42 × 60. — 71 31

| 121 | 9 kr. — 12(1 / 6(0 | 2 fl. 19 / 4 | 4 kr.

4 | × 4.

| 19 | $1\frac{6}{13}$ pf.

6 — Probe: 301 fl. 1 kr. 3 pf.

13

Berechnung ad b. in Gewicht.

31 : | 457 Ztr. 39 ℔. 3 Vrlg. 7 Lth. 1 Qt. | 14 Ztr.

143

2

100.

| 2339 | 75 ℔.

164 | × 4.

1

| 59 | 1 Vrlg.

28 | × 8.

| 231 | 7 Lth.

14 | × 4.

| 57 | $1\frac{26}{31}$ Qt.

26 |

31

Probe.

14 Ztr. 75 ℔. 1 Vrlg. 7 Lth. $1\frac{26}{31}$ Qt. × 31.

42 225 3 21 3

23 14 28 14 26

23(39 / 1(00 | 23 Ztr. 59 / 4 | 44 ℔. 231 / 8 | 28 Vrl. 57 / 4 | 14 Lth.

457 Ztr. 39 ℔. 3 Vrlg. 7 Lth. 1 Qt.

Berechnung ad c. in Apotheker-Gewicht.

```
14 : |87 ℔. 9 Unz. 1 Lth. 3 Drachm. 2 Scrup. 15 Gran. | 6 ℔.
     |‾ 3 × 12.
  |45|  3 Unz.
  |‾ 3| × 2.
  | 7|  — Lth.
  |   | × 4.
  |31|  2 Drachm.
  |‾ 3| × 3.
  |11|  — Scrup.
  |   | × 20.
  |235|  16 1/14 Gran.
  |‾ 91|
    1
    ‿
    14
```

Probe.

```
6 ℔.  3 Unz.  — Lth.  2 Drachm.  — Scrupel.  16 11/14 Gr. × 14.
24    12      —       8          —           64
 3     3      7       3          11          11
---------------------------------------------------------------
  45/12 | 3 ℔.  7/2 | 3 Unz.  31/4 | 7 Lth.  11/3 | 3 Dr.  23(5/2(0 | 11 Scrup.
87 ℔.  9 Unz.  1 Lth.  3 Drachm.  2 Scrupel.  15 Gran.
```

Der durchstrichene Quotient von 11 Scrupel, 3 Drachmen, 7 Loth, 3 Unzen und 3 ℔. wurde allemal unter jedes treffende Gewicht gesetzt; was vor und nach, der Deutlichkeit wegen, beobachtet worden ist.

Berechnung ad d. in Gold-Gewicht.

```
41 : |17 ℔.  1 Mark.  21 Karat.  3 Gran.  2 Gren. | — ℔.
     |‾ 2
      35  — Mark.
          × 24.
     161
      70
  |861|  21 Karat.
  |‾ 4|
     3   — Gran.
         × 3.
     11
         Gren.
     41
```

Probe.

— ℔. — Mark. 21 Karat. — Gran. — $\frac{11}{41}$ Gren. × 41.
35 84 3 11

Divid. 35 | 17 ℔. 861 | 35 Mark. 11 | 3 Gran.
Divis. 2 | 24 | 3 |
141

17 ℔. 1 Mark. 21 Karat. 3 Gran. 2 Gren.

Berechnung ad e. in Geld.

378 : | 27005 fl. 21 kr. 1 pf. | 71 fl.
547
16 × 60.
| 10041 | 26 kr.
2483 | × 4.
21
| 853 | $2\frac{97}{378}$ pf.
97
378

Probe.

71 fl. 26 kr. $2\frac{97}{378}$ pf. (378)

Das 9fache: 642 = 58 = 2 = × 9.
= 63 = 4500 = 49 = 2 = × 7.

32(1 | 5 fl. 12
6(0 | 97
109 | 27 kr.
4 |
6.

= 378 = 27005 fl. 21 kr. 1 pf.

Berechnung ad f. in Gewicht.

4896 : | 392864 Ztr. — ℔. 25 Loth 3 Quint. | 80 Ztr.
118 × 100.
| 118400 | 24 ℔.
20486 | × 32.
89
1817
2688
| 28697 | 5 Lth.
4217 | × 4.
| 16871 | $3\frac{2183}{4896}$ Qt.
2183
4896.

Probe.

	Ztr.	℔.	Lth.	Qt.	Verhältnißzahl. 4896
	80 Ztr.	24 ℔.	5 Lth.	$3\frac{2183}{4896}$ Qt.	× 17.
	564	171	47	21	
	Divid. 4)11	4 Ztr.	97 | 3 ℔.	51 | 12 Lth.	
	Divis. 1(00		32	4	
Das 17fache:	1364 Ztr.	11 ℔.	1 Lth.	3 Qt.	
153 =	12276 =	99 =	15 =	3 =	× 9.
			126 | 3 ℔.		
			32		
1224 =	98215 =	95 =	30 Lth.	— =	× 8.
	4(00 | 4 Ztr.		120	2183 | 545 Lth.	× 4.
			545 | 20 ℔.	4	
			665		
			32		
4896 =	392864 Ztr.	— ℔.	25 Lth.	3 Qt.	

Erläuterung.

Nachdem bey der Division über die berechneten sechs Exempel nichts Besonderes vorgefallen ist, das eine Belehrung nothwendig machte; so will ich hierüber nur kurz bemerken: daß die Auflösezahlen, z. B. in Kreutzer und Pfenning, oder in Pfund, Loth und Quint ꝛc. der Vereinfachung wegen, vielmehr um Platz zu ersparen, immer Rechts mit einem Multiplikations = Zeichen (×) angesetzt worden sind, und will sofort um so mehr eine desto ausführlichere Aufklärung über die gemachte Probe durch die Multiplikation vornehmen:

Bey der Berechnung ad a. in Geld, vielmehr durch die vorgenommene Division kam der 13te Theil mit 23 fl. 9 kr. $1\frac{6}{13}$ pf. heraus, in welche Zahlen der Sicherheit wegen, und um die Probe herzustellen, mit 13. zu multipliziren war, und zwar, der Regel nach, zuerst in $\frac{6}{13}$ Pfenning, nemlich in den Zähler 6.

Diese Multiplikation konnte jedoch erspart, und der fragliche Zähler 6. gleich für 6 Pfenning angenommen werden; — weil in das herausgekommene Produkt 78. mit 13. hätte dividirt werden müssen, wodurch die nemliche 6. sich wieder gezeigt hätten.

Demnach durfte gleich bey 1 Pfenning gesagt werden: 1 mal 13. und 6. sind 19., mit 4. darein dividirt, 4 kr. und 3 pf. zum Rest gab. Und nun mußte mit 9 kr. die Multiplikation vorgenommen, und die vorigen 4 kr. miteingezogen werden; jedoch mit 13. multiplizirt um

eine Ziffer vorwärts gerückt, zusammen 121 kr. herauskamen, durch deren Erhöhung in Gulden aber 2 fl. 1 kr. sich entzifferten, und sofort mit 25 fl die weitere Multiplikation vorgenommen, und vorige 2 fl. — miteingerechnet 301 fl. — richtig abwarfen, damit aber die Probe entsprochen hat.

Das letzte Exempel ad f. hingegen, vielmehr die Probe durch die Multiplikation mit 4896. in 80 Ztr. 24 ℔. 5 Loth. 3 $\frac{2183}{4896}$ Quint zu machen, möchte gleichwohl etwas schwierig vorkommen wollen, weil erstens eine große Zahl zum Multiplikator vorhanden war, und der Quintbruch mit $\frac{2183}{4896}$ nicht minder.

Es gieng indessen eine große Erleichterung dadurch zu Guten, weil die Zahl 4896. eine Verhältnißzahl gewesen ist, die in vier Faktoren aufgelöst werden konnte. Z. B.

2ter 3ter
1ter 9 8 4ter Faktor.
17 : | 4896 | 288 | 32 | 4.
143 1
1

Die Multiplikation mit dem ersten Faktor 17. ist die nemliche, wie kurz vorhin mit der Zahl 13. erläutert wurde, daß, weil in der Zehnerzahl eine einfache Ziffer war, so durfte nur immer um eine Ziffer in der Einheit rechts vorgerückt werden.

Was den großen Quintbruch mit $\frac{2183}{4896}$ betrifft, mußte derselbe Zähler hievon bis zur letzten Multiplikation mit dem Faktor 4. aufbehalten werden, und es entzifferten sich hieraus, durch 4. darein dividirt, 545 Loth.

Die übrige Verfahrungsweise ist nicht nur schon mehrmalen erklärt worden, sondern es liegt solche recht deutlich vor Augen, daß hieran gar nichts fehlen kann, als nur diese Multiplikation selbst vorzunehmen, was ich hiemit angerathen haben will.

92te Frage. Kann man nicht wohl auch mit noch größern Zahlen auf die nemliche Art verfahren, und sie in Faktoren auflösen?

Antw. Ja wohl. Z. B.

2ter 3ter
1ter Verhältnißzahl. 9 8 4ter Faktor.
41 : | 20664 | 504 | 56 | 7.
1 5

Berechnung.

20,664 : | 392864 Ztr. — ℔. 25 Lth. 3 Qt. | 19 Ztr.
186228
24
100.
| 24800 | 1 ℔.
4136 | × 32.
8297
12408
| 132377 | 6 Lth.
8393 | × 4.
| 33575 | $1 \frac{12911}{20664}$ Qt.
12911 |
20664

Probe.

	19 Ztr.	1 ℔.	6 Lth.	$1 \frac{12911}{20664}$ Qt.	20664
	76	4	24	4	× 41.
		8	10	41	
		49	256 | 8 ℔.	4 | 10 Lth.	
			32		
Das 41fache:	779 Ztr.	49 ℔.	— Lth.	1 Qt.	
369 =	7015 =	41 =	2 =	1 =	× 9.
2952 =	56123 =	28 =	18 =	— =	× 8.
		196	126	12911 | 3227 Lth.	× 7.
		104	3227	4	
		3(00 3 Ztr.	3353 | 104 ℔.	3.	
			32		
20664 =	392864 Ztr.	— ℔.	25 Lth.	3 Qt.	

Weitere Erläuterung.

Wenn auch gleichwohl die vorgehende Erläuterung in ihrem ganzen Umfange hieher Bezug hat; so will ich doch wegen dem sehr großen Multiplikator 20664., und der Deutlichkeit wegen, noch folgende besondere Belehrung hiemit abgeben:

Der erste Faktor aus dieser Zahl heißt 41., daher mit dessen vorgenommenen Multiplikation jedesmal der Ansatz, d. h. die Zahl des Produkts um eine Ziffer rückwärts zu machen war.

Der Quintbruch $\frac{12911}{20664}$, vielmehr der Zähler desselben, hingegen durfte gleich aus oben bemerktem Grunde für 12,911 Quint angenom-

men, bey der letzten Multiplikation mit 7. unten angesetzt, mit 4. darein dividirt, und dadurch zu 3,227 Loth, 3 Quint gemacht werden. Man sehe die Berechnung selbst, und man wird finden, daß eben diese Zahl der 3,227 Loth unter die Loth gesetzt und zu den obigen 126 Loth eingerechnet worden sind, was zusammen 3,353 Loth abwarf, mit 32. darein dividirt 104 ℔. 25 Loth resultirte. Diese 104 ℔. mußten sofort unter jene 196 ℔. in Ansatz gebracht werden, durch welche zusammen eine Zahl von 300 ℔. herauskam, mit 100. darein dividirt 3 Ztr. gab, welche unter die Zahl der Zentner, nemlich: 56,123. mit dem Faktor 7. multiplizirt, miteingerechnet werden mußten; wodurch das 20,664fache mit 392,864 Ztr. — ℔. 25 Lth. 3 Qt. als abgelegte Probe über obiges Divisions-Exempel erschienen ist.

Daß ferner die Multiplikation mit dem Zähler des Quintbruches zu umgehen war, liegt die Ursache hievon darin: weil nemlich die vier Faktoren 41. 9. 8. und 7. durch ihre gemeinschaftliche Vervielfältigung die Zahl 20,664. ausmachen, und diese Zahl den Nenner des besagten Bruchs vorstellt; daher durch dessen Division wieder die gleiche Zahl mit 12,911 hätte herauskommen müssen; wovon auch schon früher die Rede war.

Nun folgen Uebungs-Beyspiele:

					Mit	
123 Ztr.	27 ℔.	21 Lth.	1 Quint.	. . . .	18.	Lauter Verhältnißzahlen, die bey der Multiplikation in Faktoren aufgelöst werden können.
387 fl.	51 kr.	3 pf.	. . . .		27.	
4,796 Schäffel.	— Metzen.	1 Vrtl.	3 Mäßl.	1 Dreiß.	36.	
6,092 Ztr.	13 ℔.	29 Lth.	— Qt.	. . . .	45.	
27,833 fl.	49 kr.	1 pf.	. . . .		52.	
1,682 Schäffel.	3 Metz.	— Vrtl.	5 Mäßl.	— Dreiß.	336.	

zum Multiplizieren, zum Dividiren und gegenseitig die Probe zu machen.

ad b. Die Multiplikation und Division mit gebrochenen Zahlen betreffend.

93te Frage. Warum die Multiplikation und Division in einen Abschnitt aufgenommen worden ist, wurde die Ursache hievon in der vorgehenden Abtheilung ad a. damit angegeben: daß gegenseitig die Probe über jedes Exempel gemacht werden könne. Ob nun dieses auch bey Berechnung

mit gebrochenen Zahlen, und wie, statt finden könne, und an welche Regeln man sich hierin zu halten habe, möchte ich recht gerne wissen?

Antw. Man kann eben so gut bey der Multiplikation mit Bruchzahlen durch Bruchzahlen die Probe durch die Division herstellen, und es ist die einfacheste Regel zur Multiplikation selbst, diese:

Daß der Zähler mit dem Zähler, und der Nenner mit dem Nenner vervielfältiget werden müsse.

Es sollen z. B. nachstehende Brüche multiplizirt werden, nemlich:

	Multiplikandus.		Multiplikator.		Produkt.		
a.	$\frac{3}{8}$	durch	$\frac{2}{3}$	=	$\frac{6}{24}$	=	$\frac{1}{4}$
b.	$\frac{3}{4}$	×	$\frac{2}{9}$	=	$\frac{6}{36}$	=	$\frac{1}{6}$
c.	$\frac{7}{8}$	×	$\frac{5}{7}$	=	$\frac{35}{56}$	=	$\frac{5}{8}$
d.	$\frac{4}{5}$	×	$\frac{6}{7}$	=	$\frac{24}{35}$		
e.	$\frac{9}{14}$	×	$\frac{8}{15}$	=	$\frac{72}{210}$	=	$\frac{12}{35}$
f.	$\frac{23}{36}$	×	$\frac{7}{12}$	=	$\frac{161}{432}$		

Erläuterung.

Daß die Resultate, vielmehr die Multiplikations-Produkte immer kleiner, als die Brüche der Multiplikations-Exempel selbst, ausgefallen sind, liegt in der Natur der Sache; weil nur mit den Theilen von einem Ganzen die Multiplikation vorgenommen worden ist.

Wo es zulässig war, d. h. wo sich keine Primzahl vorgefunden hat, sind die herausgekommenen Produkte mit den einschlägigen Divisoren jedesmal abgekürzt worden.

ad e. und ad f. wurden die Nenner miteinander auf die kürzeste Art multiplizirt.

94te Frage. Wie läßt sich nun die Probe über alle diese Exempel von Lit. a. bis f. machen, um die Ueberzeugung der richtig geschehenen Multiplikation zu erhalten, und was wird hierin zu beobachten seyn?

Antw. Die Probe kann, wie der Inhalt der vorgehenden Frage bemerkt hat, durch die Division vollzogen werden, und man muß hiebey jedesmal

a. das Produkt zum Dividend, und

b. den Multiplikator zum Divisor annehmen, dann muß

c. der Multiplikand, zum Beweiß der Richtigkeit, zur Probe erscheinen.

ad a.	ad b.	ad c.
Das Produkt ist jetzt der Dividend.	Der Multiplikator ist jetzt der Divisor.	Zur Probe erscheint der vorherige Multiplikand.

ad a. $$\frac{1}{4} : \frac{2}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$$

" b. $$\frac{1}{6} : \frac{2}{9} = \frac{1}{6} \times \frac{9}{2} = \frac{9}{12} \overset{3}{=} \frac{3}{4}$$

" c. $$\frac{5}{8} : \frac{5}{7} = \frac{5}{8} \times \frac{7}{5} = \frac{35}{40} \overset{5}{=} \frac{7}{8}$$

" d. $$\frac{24}{35} : \frac{6}{7} = \frac{24}{35} \times \frac{7}{6} = \frac{168}{210} \overset{42}{=} \frac{4}{5}$$

" e. $$\frac{12}{35} : \frac{8}{15} = \frac{12}{35} \times \frac{\overset{30}{15}}{8} = \frac{18(0}{28(0} \overset{2}{=} \frac{9}{14}$$

" f. $$\frac{161}{432} : \frac{7}{12} = \frac{\overset{322}{161}}{432} \times \frac{12}{7} = \frac{\overset{25}{1932}}{\underset{50}{3024}} \overset{84}{=} \frac{23}{36}$$

Erläuterung.

Die Division mit Bruchzahlen durch Bruchzahlen zu verrichten, unterliegt eben so wenig einer Schwierigkeit, als mit ganzen Zahlen; wenn nur die Ansätze, wie solche vorgezeigt worden sind, regelmäßig beobachtet werden.

Nach dem Dividendbruch ad a. mit $\frac{1}{4}$ war das bekannte Divisions-Zeichen mit zwey Punkten (:) anzusetzen, daneben

der Divisorbruch $\frac{2}{3}$, sodann war ein Gleichheits = Zeichen (=) Rechts daran zu machen. Jetzt wiederholt $\frac{1}{4}$, dann ein Multiplikations = Zeichen, (×) und neben dieses $\frac{2}{3}$, jedoch umgekehrt mit $\frac{3}{2}$. Ferner die Zähler und Nenner dieser zwey letzten Bruchzahlen mit einander multiplizirt, den Quotienten neben dem Gleichheits = Zeichen mit $\frac{3}{8}$ zur Probe richtig darstellten.

95te Frage. Die Multiplikation mit Brüche durch Brüche und die abgelegte Probe über dieselbe durch die Division zu machen, habe ich bereits kennen gelernt, und finde auch die dabey beobachtete Verfahrungsweise sehr begreiflich; daher ich um so neugieriger geworden bin: Divisions = Exempel mit Bruchzahlen zu sehen, über welche die Probe durch die Multiplikation zu machen ist; wie dieses bewerkstelliget werden könne?

Antw. Nachstehendermassen. Z. B.

	a. Dividend.		b. Divisor.		c. d. Umgekehrter Divisor.				e. Quotient.
a.	$\frac{2}{3}$	:	$\frac{1}{4}$	=	$\frac{2}{3}$	×	$\frac{4}{1}$	=	$\frac{8}{3}$ | $2\frac{2}{3}$
b.	$\frac{1}{4}$	:	$\frac{2}{3}$	=	$\frac{1}{4}$	×	$\frac{3}{2}$	=	$\frac{3}{8}$
c.	$\frac{5}{6}$	:	$\frac{3}{8}$	=	$\frac{5}{6}$	×	$\frac{8}{3}$	=	$\frac{40}{18}$ | $2\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$
d.	$\frac{3}{8}$	:	$\frac{5}{6}$	=	$\frac{3}{8}$	×	$\frac{6}{5}$	=	$\frac{18}{40} = \frac{9}{20}$
e.	$\frac{7}{16}$	:	$\frac{5}{9}$	=	$\frac{7}{16}$	×	$\frac{9}{5}$	=	$\frac{63}{80}$
f.	$\frac{5}{9}$	:	$\frac{7}{16}$	=	$\frac{5}{9}$	×	$\frac{16}{7}$	=	$\frac{80}{63}$ | $1\frac{17}{63}$

Erläuterung.

Bey einer solchen Division hat es die nemliche Beschaffenheit, wie wenn solche mit ganzen Zahlen vorgenommen worden wäre; — denn, daß ad a. $\frac{1}{4}$ in $\frac{2}{3}$ gerade $2\frac{2}{3}$ mal enthalten ist, kann keinem Zweifel unterliegen.

Man darf nur $\frac{1}{4}$ zweimal, und $\frac{2}{3}$ aus $\frac{1}{4}$ mit $\frac{1}{6}$ zusammenaddiren, so müssen richtig die verlangten $\frac{2}{3}$ ad a. herauskommen. Z. B.

Oder ad c. mit $\frac{5}{6}$ eben so:

$$\overbrace{\quad}^{12}\begin{array}{c|l} \frac{1}{4} & 3. \\ \frac{1}{4} & 3. \\ \frac{1}{6} & 2. \\ \hline & \frac{8}{12} \overset{4}{=} \frac{2}{3} \text{ ad a.} \end{array} \qquad \overbrace{\quad}^{24}\begin{array}{c|l} \frac{3}{8} & 3 = 9 \\ \frac{3}{8} & 3 = 9 \\ \frac{1}{12} & 2 = 2 \\ \hline & \frac{20}{24} \overset{4}{=} \frac{5}{6} \text{ ad c.} \end{array}$$

Nun wird man gleichwohl fragen wollen, wie das kommt, daß ad a. $\frac{2}{3}$ aus $\frac{1}{4}$ gerade $\frac{1}{6}$ und
„ c. $\frac{2}{9}$ „ $\frac{3}{8}$ „ $\frac{1}{12}$ giebt? Dann ist die Antwort hierauf diese:

ad a. ad c.

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12} \overset{2}{=} \frac{1}{6} \text{ ad a.} \qquad \frac{3}{8} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{72} \overset{6}{=} \frac{1}{12} \text{ ad c.}$$

Bemerkung.

Auf diese Art lassen sich dergleichen Aufgaben am Leichtesten auflösen; wenn die treffenden zwey Bruchzahlen miteinander multiplizirt werden, so ist das Produkt hievon der verlangte kleinere Theil, wie hier z. B. $\frac{2}{3}$ aus $\frac{1}{4}$ nicht mehr als $\frac{1}{6}$ seyn konnte.

96te Frage. Nun möchte ich aber auch über die Divisions-Exempel von Lit. a. bis f., wie oben gesagt, die Probe durch die Multiplikation kennen lernen, wie solche vorzunehmen ist?

Antw. Der Quotient von dem Exempel ad a., nemlich $2\frac{2}{3}$ ad e. wird mit dem Divisor ad b., nemlich mit $\frac{1}{4}$, multiplizirt, und das hieraus erfolgende Produkt muß den Dividend ad a. mit $\frac{2}{3}$ angeben, was auch von ad b. bis ad f. zu berücksichtigen ist. Z. B.

ad a. ad b. ad a.

$$2\tfrac{2}{3} = \frac{8}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{12} \overset{4}{=} \frac{2}{3}$$ Probe ad a.

$$\frac{3}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{24} \overset{6}{=} \frac{1}{4}$$ „ ad b.

$$2\tfrac{2}{9} = \frac{20}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{60}{72} \overset{12}{=} \frac{5}{6}$$ „ ad c.

$$\frac{9}{20} \times \frac{5}{6} = \frac{45}{120} \overset{15}{=} \frac{3}{8}$$ „ ad d.

$$\frac{63}{80} \times \frac{5}{9} = \frac{315}{720} \overset{45}{=} \frac{7}{16}$$ „ ad e.

27

$$1\tfrac{17}{63} = \frac{80}{63} \times \frac{7}{16} = \frac{560}{1008} \overset{112}{=} \frac{5}{9}$$ „ ad f.

378

ad c. Die Multiplikation und Division mit gemischten Zahlen betreffend.

97te Frage. Daß eine gemischte Zahl aus einer ganzen Zahl, welcher eine Bruchzahl angehängt ist, bestehe, habe ich bey der Subtraktion mit ähnlichen Zahlen wahrnehmen können; — indessen möchte ich auch wissen, wie man bey der Multiplikation und Division in solchen vorkommenden Fällen zu verfahren hätte?

Antw. Die Multiplikation mit gemischten Zahlen zu verrichten, kann auf dreierlei Arten geschehen, was einen besondern Vortheil an die Hand giebt; — indem eine solche Verschiedenheit zur gegenseitigen Probe dienen wird.

Man wollte z. B. $5\frac{6}{7}$ durch $4\frac{2}{3}$ vervielfältiget wissen, und zwar:

a. Nach der ersten Art.

$$5\frac{6}{7} \times 4\frac{2}{3}$$

56

$$\frac{41}{7} \times \frac{14}{3} = \frac{574}{21} \Big| \; 27\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

(157)

b. Nach der zweiten Art.

$5\frac{6}{7}$
$4\frac{2}{3}$

20
$3\frac{19}{21}$. Diese Zahl ist $\frac{2}{3}$ aus $5\frac{6}{7}$.
$3\frac{3}{7}$. " " " $\frac{6}{7}$ " 4.

$\frac{28}{21}$ | 1.

$$27\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

c. Nach der dritten Art.

$5\frac{6}{7} = 7$ | 41
$4\frac{2}{3} = 3$ | 14 2
3: | 82 | $27\frac{1}{3}$
21
3

Probe durch die Division.

$27\frac{1}{3} : 4\frac{2}{3}$.

$$\frac{82}{3} : \frac{14}{3} = \frac{82}{3} \times \frac{3}{14} = \frac{246}{42} \Big| \; 5\frac{36}{42} = \frac{6}{7}$$

(36)

Ferner: $9\frac{1}{6}$ durch $7\frac{5}{8}$.

ad a.

$$9\frac{1}{6} \times 7\frac{5}{8}$$

330

$$\frac{55}{6} \quad \frac{61}{8} = \frac{3355}{48} \Big| \; 69\frac{43}{48}$$

(473, 4)

ad b.

$9\frac{1}{6}$
$7\frac{5}{8}$

63
$5\frac{35}{48}$. Diese Zahl ist $\frac{5}{8}$ aus $9\frac{1}{6}$.
$1\frac{1}{6}$ " " " $\frac{1}{6}$ " 7.

$69\frac{43}{48}$.

ad c.

$9\frac{1}{6} = 6$ | 55
 | 330
$7\frac{5}{8} = 8$ | 61
48: | 3355 | $69\frac{43}{48}$.
 | 473
 | 4
48

Probe durch die Division.

$69\frac{43}{48} : 7\frac{5}{8}$.

595
276

$$\frac{3355}{48} : \frac{61}{8} = \frac{3355}{48} \times \frac{8}{61} = \frac{26840}{2928} \Big| \; 9\frac{488}{2928} = \frac{1}{6}$$

288

(488)

ad a. $24\frac{5}{7} \times 23\frac{6}{11}$

$\frac{173}{7} \times \frac{259}{11} = \frac{44807}{77} = 581\frac{10}{11}$

```
        777
       1813
       259
      -----
      44807 | 581 10/11
         77 |
      -----
       6340
        17   7      10
        --- ---  =  --
        77          11
```

ad b.

```
   24 5/7
   23 6/11
   -------
   72
  48
   13 37/77.   Diese Zahl ist 6/11 aus 24 5/7.
   16 3/7.      "    "    "   5/7  "  23.
   -------
  581 70/77.
```

ad c.

```
24 5/7  = 7.  | 173
              |          173
23 6/11 = 11. | 259   =   37
              |  4      -----
              |          1211
              |          519
  ------------+----------------
       11:    |        6401 | 581 10/11.
              |         920 |
              |          1
              |          11
```

Probe durch die Division.

$581\frac{10}{11} : 24\frac{5}{7}$

$\frac{6401}{11} : \frac{173}{7} = \frac{6401}{11} \times \frac{7}{173} = \frac{44807}{1903} = 23\frac{1038}{1903} = \frac{6}{11}.$

```
     103
    6748
   44807 | 23  1038   173    6
    1903 |     ---- =     =  --
                1903         11
                 17
```

Erläuterung.

Aus der Multiplikation des ersten Exempels ad a., nach der ersten Art, sieht man sehr deutlich: daß

a. $5\frac{6}{7}$, so wie

b. $4\frac{2}{3}$ vorerst eingerichtet werden mußten, d. h. die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplizirt, und der Zähler desselben Bruchs mit einzuziehen war; wornach

ad a. $\frac{41}{7}$ und

= b. $\frac{14}{3}$ als unächte Brüche herauskamen; wovon der Regel gemäß, Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizirt werden mußten.

Die Multiplikation mit 41. und 14. geschahe kurzweg damit, daß gesagt wurde: 4 mal 4 ist 16. d. i. 16.
4 = 1 = 4. und 1 ist 5.

Die Einheit 6. ist bey der Zahl 14. über die Zehnerzahl 1. und daneben Links die vermehrte Ziffer 5. gesetzt worden.

Zusammenaddirt gab es eine Zahl von 574, in diese mit dem Nenner 21. dividirt, einen Quotienten von $27\frac{1}{3}$, als verlangtes Resultat dieser vorgenommenen Multiplikation.

Bey dem Exempel ad b., nach der zweyten Art, mußten zuerst die ganzen Zahlen 5. und 4. multiplizirt werden, und es kam ein Produkt von 20. hiedurch heraus.

Jetzt waren $\frac{2}{3}$ aus $5\frac{6}{7}$ auszuheben. Z. B.

$$\frac{5\frac{6}{7}}{\frac{41}{7}} \times \frac{2}{3} = \frac{\overset{\frown}{19}\;82}{21} \Big| \; 3\frac{19}{21}$$

M. s. die Berechnung an.

Sodann $\frac{6}{7}$ aus 4.

$$4 \times \frac{6}{7:}$$

$$7 \,;\; \Big| \begin{matrix} 24 \\ -3 \\ \underbrace{}_{7} \end{matrix} \Big| \; 3\frac{3}{7}.$$

Eben so, wie vor.

(Weil schon $\frac{2}{3}$ aus $5\frac{6}{7}$ ausgehoben worden sind, so durften aus diesem Grunde nur $\frac{6}{7}$ aus der ganzen Zahl 4. ausgehoben werden,) und das endliche Resultat hievon war ebenfalls $27\frac{1}{3}$.

Die Multiplikation des Exempels ad c., nach der dritten Art, möchte wohl die kürzeste und verständlichste seyn, weil bey derselben auch eine Abkürzung zwischen 7. und 14. statt finden konnte.

Daß hiebey die gemischten Zahlen $5\frac{6}{7}$, so wie $4\frac{2}{3}$ zuvor, wie bey ad a. eingerichtet werden mußten, versteht sich von selbst; nur kamen nach dieser Art die Nenner Links und die Zähler Rechts neben den …genen Vertikalstrich zu stehen.

Ferner durfte nur die obere Zahl 41. mit der untern, nemlich mit 2. vervielfältiget, und in das Produkt 82. mit der Zahl 3., die sich Links befand, dividirt werden, kam gleichfalls ein Resultat von $27\frac{1}{3}$ heraus.

Die Probe durch die Division hierüber zu machen, mußten $27\frac{1}{3}$ zum Dividend, und $4\frac{2}{3}$ zum Divisor angenommen werden, und es kamen zur Ueberzeugung $5\frac{6}{7}$ heraus.

Wird aber umgekehrt $5\frac{6}{7}$ zum Divisor gemacht, z. B.

$$\frac{27\frac{1}{3}}{\frac{82}{3}} : \frac{5\frac{6}{7}}{\frac{41}{7}} = \frac{82}{3} \times \frac{7}{41} = \frac{\overset{\frown}{82}}{\frac{574}{123}} \Big|\ 4\,\frac{82}{123} \overset{41}{=} \frac{2}{3}$$

so giebt der Quotient auch eben so richtig $4\frac{2}{3}$ an.

Bemerkung.

Ein besonderer, mir sehr erwünschter merkwürdiger Umstand hat sich bey der Multiplikation des dritten Exempels ad a. gezeigt, bey welchem nemlich am Ende die Division mit

77. in 44,807.

vorgefallen ist; bey welcher die Reste unter den gezogenen Querstrich gesetzt wurden, und wobey die Division selbst in einem solchen Falle keinen Schaden zu leiden hat; in so ferne man die neue Zahl mit Vorrückung einer Ziffer Rechts gehörig im Auge behält, welcher Vortheil jedoch nur auf die verkürzte Divisionsart Bezug haben kann.

Nun folgen Uebungs-Beyspiele:

Zur Multiplikation.	Zur Division.	Zur Multiplikation.	Zur Division.
$\frac{4}{5} \times \frac{2}{7}$	$\frac{4}{5} : \frac{2}{7}$	$3\frac{2}{5} \times 2\frac{7}{8}$	$3\frac{2}{5} : 2\frac{7}{8}$
$\frac{3}{7} \times \frac{1}{5}$	$\frac{3}{7} : \frac{1}{5}$	$4\frac{1}{3} \times 3\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{3} : 3\frac{3}{4}$
$\frac{6}{11} \times \frac{4}{9}$	$\frac{6}{11} : \frac{4}{9}$	$5\frac{2}{7} \times 4\frac{1}{8}$	$5\frac{2}{7} : 4\frac{1}{8}$
$\frac{8}{13} \times \frac{7}{12}$	$\frac{8}{13} : \frac{7}{12}$	$6\frac{2}{3} \times 5\frac{7}{9}$	$6\frac{3}{3} : 5\frac{7}{9}$
$\frac{5}{16} \times \frac{9}{10}$	$\frac{5}{16} : \frac{9}{10}$	$7\frac{5}{6} \times 6\frac{1}{3}$	$7\frac{5}{6} : 6\frac{1}{3}$
$\frac{7}{9} \times \frac{8}{15}$	$\frac{7}{9} : \frac{8}{15}$	$8\frac{3}{4} \times 7\frac{4}{5}$	$8\frac{3}{4} : 7\frac{4}{5}$

Zehenter Abschnitt.

Ueber die Bruchlehre, nemlich: mit Bruchzahlen durch Bruchzahlen zu rechnen,

und zwar:

a. die Addition,
b. = Subtraktion,
c. = Multiplikation, und
d. = Division

betreffend.

98te Frage. Recht gerne möchte ich die Bruchlehre, an der mir sehr Vieles gelegen ist, von Grund aus kennen lernen, um in jedem vorkommenden Falle, der nur irgend in den oben benannten vier Rechnungsarten sich zeigen kann, mir ohne Anstand selbst helfen zu können; daher ich mehrmalen aus dieser Ursache verschiedene Rechenbücher vor die Hand nahm, um, wenigstens aus einem derselben, mit den festgesetzten Regeln dieser besondern Rechnungsarten genauer bekannt zu werden, und auf den wahren Grund zu kommen, vermög welchem ich einen sichern Anhaltspunkt zu erhalten hoffte; allein, wenn auch eines Theils sehr verschiedenartige Fälle von Bruchrechnungen darin vorgekommen sind, so waren doch andern Theils die Erläuterungen hierüber nicht so beschaffen, daß ich den ächten Begriff aus denselben hätte schöpfen, und jede Aufgabe lösen können; weil es an der gehörigen Deutlichkeit des Vortrages fehlte. — Wie wird wohl diesem wesentlichen Abgange zu begegnen seyn?

Antw. Das kann am leichtesten dadurch geschehen, wenn man den vorkommenden Bruchzahlen, ob sie zufällig oder selbst gewählt entstanden sind, gleich eine gewisse Benennung beylegt, ob sie

a. in Geld,
b. = Gewicht, oder
c. = irgend einer Mässerei bestehe.

99te Frage. Was werden auch für Regeln vorausgesetzt, an die man sich bey Berechnungen mit Bruchzahlen zu halten hat, um jeder Irrung auszuweichen?

Antw. Daß man bey allen vier Spezies am Ersten darauf zu sehen habe, ob die Nenner der fraglichen Bruchzahlen von gleicher Beschaffenheit, oder wenigstens von der Art seyen, daß ein Nenner in dem Andern als Faktor erscheine, das will so viel sagen: ob sich der kleinere in dem größern Nenner auflöse oder nicht. Z. B.

a.	b.	c.	d.	e.	f.
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{17}{32}$	$\frac{31}{64}$

Erläuterung.

Bey diesen sechs Bruchzahlen hebt sich

ad a.	2	in	4.	ad b.	
„ b.	4	„	8.	„ c.	
„ c.	8	„	16.	„ d.	
„ d.	16	„	32.	„ e.	und
„ e.	32	„	64.	„ f.	auf.

100te Frage. Wenn aber nach angestellter Vergleichung eine solche Gleichartigkeit der gegenseitigen Nenner fehlt, was ist in einem solchen Falle zu thun nothwendig?

Antw. Man muß sich hierin an die bereits früher gegebenen Regeln von der 73ten Frage bis zu der Antwort 78. einschlüßig halten, und hienach eine gleiche Benennung der fraglichen Nenner herzustellen suchen. Dann kann man aber auch ungehindert alle vorkommenden Rechnungen von Bruchzahlen gehörig ausarbeiten, und die verlangten Resultate erschöpfen.

ad a. Die Addition betreffend.

Es sollen nun z. B. addirt werden:

a.	b.	c.	d.
$\frac{1}{8}$ fl.	$\frac{3}{8}$ fl.	$\frac{5}{8}$ fl.	$\frac{7}{8}$ fl.

Berechnung.

ad a. $\frac{1}{8}$ fl. „ b. $\frac{3}{8}$ „ „ c. $\frac{5}{8}$ „ „ d. $\frac{7}{8}$ „ $\frac{16}{8}$ | 2 fl.	Weil hier die Nenner gleichlautend waren, so durften nur die Zähler zusammenaddirt und unter eine Summe per 2 fl. gebracht werden.

101te Frage. Wie sind nun diese Guldenbrüche in Kreuzer und in Pfenning zu verwandeln?

Antw. Durch die Auflösezahl 60. in Kreutzer, und diese Kreutzer mit 4. zu Pfenning.

102te Frage. Wie ist das anzufangen?

Antw. Man multiplizirt den Zähler des Bruchs mit 60. und in das herauskommende Produkt wird mit dem Nenner 8. dividirt; sodann aber, wenn ein Rest von Kreutzern bleiben sollte, wird mit 4 in diesen Rest multiplizirt, und mit dem Nenner 8. ebenfalls wieder in das erfolgte Produkt dividirt. Z. B.

Berechnung, vielmehr Auflösung.

ad a.	ad b.	
1 60 8 : | 60 | 7 kr. −4 | × 4. | 16 | 2 pf.	3 60 8 : | 180 | $22\frac{1}{2}$ kr. −24 | 4 8 = $\frac{1}{2}$.	Auf diese Art geht es schneller, und ist $\frac{1}{2}$ kr. so viel als 2 pf.

ad c.	ad d.	
5 60 8 : | 300 | $37\frac{1}{2}$ kr. −64 | 4 8 = $\frac{1}{2}$.	7 60 8 : | 420 | $52\frac{1}{2}$ kr. −24 | 4 8 = $\frac{1}{2}$.	und nun diese Kreutzer zusammengerechnet, z. B.

ad a.	$7\frac{1}{2}$ kr.
„ b.	$22\frac{1}{2}$ „
„ c.	$37\frac{1}{2}$ „
„ d.	$52\frac{1}{2}$ „

Thut wie oben 2 fl. — kr.

Nun sollen aber

a.	b.	c.	d.	e.	f.	g.
$\frac{1}{8}$ Ztr.	$\frac{1}{4}$ Ztr.	$\frac{3}{8}$ Ztr.	$\frac{1}{2}$ Ztr.	$\frac{5}{8}$ Ztr.	$\frac{3}{4}$ Ztr.	$\frac{7}{8}$ Ztr.

zusammenaddirt werden.

ad a. $\frac{1}{8}$ Ztr.
= b. $\frac{1}{4}$ =
= c. $\frac{3}{8}$ =
= d. $\frac{1}{2}$ =
= e. $\frac{5}{8}$ =
= f. $\frac{3}{4}$ =
= g. $\frac{7}{8}$ =

$\frac{28}{8} \mid 3\frac{4}{8} \overset{4}{=} \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ Ztr.

Diese Brüche sind, wie die Auflösungs=Tabelle über die Herstellung der Unterabtheilungen lehrt, in Gedanken zusammenzuzählen.

Man nimmt $\frac{3}{4}$ für $\frac{6}{8}$
$\frac{1}{2}$ = $\frac{4}{8}$ und
$\frac{1}{4}$ = $\frac{2}{8}$ an.

Die Uebung hierin kommt nach und nach von selbsten, und da man weiß, daß 1 Zentner 100 ℔.
1 ℔. 32 Loth, und
1 Loth 4 Quint giebt; so wird deren Auflösung als Probe, wie folgt, vorgenommen:

ad a. 1.
100.
8 : | 100 − 24 | 12 ℔. × 32.
| 128 − 4 | 16 Loth. i. e. . . $12\frac{1}{2}$ ℔.

= b. 4 : | 100 − 2 | 25 ℔. = = . . 25 =

= c. 8 : | 300 − 64 − 8 | $37\frac{1}{2}$ ℔. $\overset{4}{=} \frac{1}{2}$. = = . . $37\frac{1}{2}$ =

= d. 2 : | 100 | 50 ℔. = = . . 50 =

= e. 8 : | 500 − 24 − 8 | $62\frac{1}{2}$ ℔. $\overset{4}{=} \frac{1}{2}$. = = . . $62\frac{1}{2}$ =

= f. 4 : | 300 − 2 | 75 ℔. = = . . 75 =

= g. 8 : | 700 − 64 − 8 | $87\frac{1}{2}$ ℔. $\overset{4}{=} \frac{1}{2}$. = = . . $87\frac{1}{2}$ =

Summa wie oben 3 Ztr. 50 ℔.

Bemerkung.

Daß dergleichen Auflösungen in allen, auf diese Art Bezug habenden Rechnungen immer so behandelt werden müssen, versteht sich von selbst; in so ferne man die geeignete Kenntniß von den einschlägigen Auflösezahlen hat.

Es sollen nun ferner addirt werden:

$$\frac{14}{23} \text{ fl.} + \frac{17}{28} \text{ fl.}$$

Berechnung.

644.

$\frac{14}{23}$ fl. | 28 × 14.
112
= 392.

$\frac{17}{28}$ = | 23 × 17.
161
= 391.

644 : | 783 | 1 fl.
139
60
| 8340 | 12 kr.
1902 | × 4.
61
| 2448 | $3\frac{122}{161}$ pf.
516
4
644 = $\frac{129}{161}$.

Aufgelöst zu 1 fl. 12 kr. $3\frac{122}{161}$ pf.

Aufsuchung des General-Nenners.

28
23 × 7.
161 × 4.
644.

1te Probe.

14
60
23 : | 840 | 36 kr.
152 | × 4.
1
| 48 | $2\frac{2}{23}$ pf.
2
23

36 kr. $2\frac{2}{23}$ pf. | 7 = 14. *

17
60
28 : | 1020 | 36 kr.
182 | × 4.
1
| 48 | $1\frac{5}{7}$ pf.
20 | 4
28 = $\frac{5}{6}$.

36 kr. $1\frac{5}{7}$ pf. | 23 = 115

161.

$\frac{129}{161}$ pf.

1 fl. 12 kr. $3\frac{122}{161}$ pf.

Abgezogen — = 36 = $2\frac{14}{161}$ = *

— fl. 36 kr. $1\frac{115}{161}$ pf. = $\frac{5}{7}$. 23

2te Probe durch

die Subtraktion, durch welche die zweyte aufgelöste Bruchzahl $\frac{17}{28}$ fl. oder 36 kr. $1\frac{5}{7}$ pf. herauskam.

Erläuterung.

Die Aufsuchung des General=Nenners hat die Zahl 644. zur Folge gehabt, in welche, wie es bekannt ist, mit 23. und 28. dividirt, und in die herausgekommenen Produkte mit 14. und 15. multiplizirt werden mußte, was auch auf die kürzeste Art geschehen ist.

Das Resultat dieser, durch die vorgenommene Auflösung der Guldenbrüche erfolgten Addition, war: 1 fl. 12 kr. $3\frac{129}{161}$ pf., und es wurde solches durch zweyerlei Art erprobt hergestellt.

ad b. Die Subtraktion betreffend.

Es sollen z. B. subtrahirt, und die Probe durch die Addition gemacht werden, wie folgt:

a. $\frac{2}{3}$ fl. von $\frac{8}{9}$ fl.

b. $\frac{3}{5}$ „ — $\frac{7}{8}$ „

c. $\frac{1}{4}$ „ — $\frac{11}{12}$ „

d. $\frac{3}{8}$ „ — $\frac{17}{24}$ „

Berechnung ad a.

27.

$\frac{8}{9}$ fl. | 3 = 24

$\frac{2}{3}$ „ | 9 = 18

Rest $\frac{2}{9}$: fl.

$\frac{6}{27}$ (3) = $\frac{2}{9}$

2
60
120 | $13\frac{1}{3}$ kr.
33 (3) = $\frac{1}{3}$.
9

8
60
9 : 480 | $53\frac{1}{3}$ kr.
33
9

2
60
3 : 120 | 40 - kr.

Rest $13\frac{1}{3}$ kr. Probe ad a.

Berechnung ad b.

$$\overbrace{\qquad}^{40.}$$

$$\frac{7}{8}\text{ fl.}\ \Big|\ 5 = 35.$$

$$\frac{3}{5}\text{ „}\ \Big|\ 8 = 24.$$

$$\text{Rest } \frac{11}{40}$$

$$\begin{array}{l} \quad 11 \\ \quad 60 \\ 4(0 : \big| 66(0 \big| \ 16\tfrac{1}{2}\text{ kr.} \\ \qquad 22 \\ \qquad 4 = \tfrac{1}{2}. \end{array}$$

$\frac{7}{8}$ fl. sind $52\frac{1}{2}$ kr.
$\frac{3}{5}$ „ „ 36 „

$16\frac{1}{2}$ kr. Rest wie oben.

Berechnung ad c.

$$\frac{11}{12}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\text{Rest } \frac{8}{12} \overset{4}{=} \frac{2}{3}\text{ fl. oder 40 kr.}$$

$\frac{11}{12}$ fl. sind 55 kr.
$\frac{1}{4}$ „ „ 15 „

Rest 40 kr. Probe.

Berechnung ad d.

$$\frac{17}{24}$$

$$\frac{3}{8}$$

$$\text{Rest } \frac{8}{24} \overset{8}{=} \frac{1}{3}\text{ fl. oder 20 kr.}$$

$$\begin{array}{l} \quad 17 \\ \quad 60 \\ 24 : \big| 1020 \big| \ 42\tfrac{1}{2}\text{ kr. d. i. } 42\tfrac{1}{2}\text{ kr.} \\ \qquad 62 \\ \qquad \tfrac{1}{24} \overset{12}{=} \tfrac{1}{2}. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad 3 \\ \quad 60 \\ 8 : \big| 180 \big| \ 22\tfrac{1}{2}\text{ kr. „ „ } 22\tfrac{1}{2}\text{ „} \\ \qquad 24 \\ \qquad 8 = \tfrac{1}{2}. \quad \text{Probe: 20 - kr.} \end{array}$$

Nun wollen wir die Reste der Guldenbrüche, und jene der aufgelösten Kreutzer zusammenaddiren und eine Hauptprobe folgendermassen damit anstellen. Z. B.

360. — Zu Kreutzer aufgelöst.

ad a. $\frac{2}{9}$ fl.	40	= 80.	. . . . .	— fl. 13 $\frac{1}{3}$ kr. = $\frac{2}{6}$.
= b. $\frac{11}{40}$ =	9	= 99.	. . . . .	— = 16 $\frac{1}{2}$ = = $\frac{3}{6}$.
= c. $\frac{2}{3}$ =	120	= 240.	. . . . .	— = 40 =
= d. $\frac{1}{3}$ =	120	= 120.	. . . . .	— = 20 =
		53(9 : 36(0 = 1 fl.		1 fl. 29 $\frac{5}{6}$ kr.

53(9
36(0 | 1 fl.
179
60
36(0 : | 1074(0 | 29 $\frac{5}{6}$ kr.
350
3 — $\frac{3}{36} = \frac{6}{\ } = \frac{5}{6}$.

Erläuterung.

Dieser General-Nenner war leicht aufzufinden, und zwar durch 40. und 9. Uebrigens liegt in dieser gegenseitigen Probe zugleich der Beweiß vor: daß der Rechner verschiedenerlei Versuche machen kann, um solche herzustellen.

Es sollen ferner $\frac{12}{63}$ Ztr. von $\frac{23}{51}$ Ztr. abgezogen werden.

Berechnung.

1071.

$\frac{23}{51}$ Ztr.	21	=	23 × 46 = 483
$\frac{12}{63}$ =	17 × 34	=	204
			279

279
100
1071 : | 27900 | 26 $\frac{54}{1071}$ Ⅲ.
6484
5
1071.

Vergleichung.

3.) $\frac{51.}{17.} \times \frac{63.}{21}$

147
357 × 3.
1,071.

103te Frage. Dieser hier verbliebene Pfundbruch mit $\frac{54}{1071}$ giebt mir Veranlassung zu fragen: Wie, und auf welche Art derselbe kleiner gemacht werden könnte, da bey dem Zähler die Endziffer gerad, und jene beym Nenner ungerad ist?

Antw. Auf zweyerlei Art kann das geschehen, und zwar:

a. durch das Nachforschen mit einer Ziffer in Zähler und Nenner, ob sie in beyden Zahlen aufgeht, und

b. durch die sogenannte Staffeldivision. Z. B.

ad a. $\frac{54}{1071}$ (2, 12) | 3 | $\frac{18}{357}$ (2) | 3 | $\frac{6}{119}$

ad b. $\frac{54}{1071}$
535 | 19
4 | 54 | 1
*9 |
45 | 5.

ad b. *9 Primzahl.

$\frac{54}{1071} = \frac{6}{119}$ (18)

Weil die Ziffer 9. sich in 45. ohne Rest auflöste; so hebt solche auch den Zähler 54. und den Nenner 1071. ebenfalls auf.

Erläuterung.

Die Staffeldivision ist das sicherste und gewisseste Hilfsmittel, einen großen Bruch in kleinere Theile umzuwandeln, die jedoch den gleich großen Werth aussprechen.

Man dividirt zuerst mit dem Zähler in den Nenner, und sobald dieses geschehen ist, wird mit dem verbliebenen Rest in den ersten Divisor dividirt, und so immer fortgefahren, bis die Zahl sich aufhebt. Bleibt jedoch am Ende 1. über, so ist derselbe Bruch von jener Art, wo keine Aufhebung statt finden kann. Z. B. Es sollen die Brüche a. $\frac{1674}{3218}$, und b. $\frac{341}{789}$ kleiner gemacht werden:

ad a. $\frac{1674}{3213}$ | 1
1539 | 1674 | 1
135 |
1539 | 11
184
5 | 135 | 2
*27 |
54 | 2

Diese Zahl *27. ist hier jene Primzahl, welche in Zähler und Nenner aufgeht.

Beweiß hievon.

```
    5  27
 1674 | 62
 3283 | 119
  54
  2
```

ad b.

```
341 |
789 | 2
107 |
   341 | 3
   2(0 |
      10(7 | 5
          20 | 2
           6 |
             7 | 1
             1 |
```

Weil bey dieser Reduzirung 1. zum Rest verblieben ist, so liegt der Beweis vor, daß ein dergleichen Bruch sich gar nicht aufheben läßt, weil derselbe aus zwey Primzahlen besteht.

104te Frage. Bey dieser so schön darbiethenden Gelegenheit möchte ich auch gerne in Erfahrung bringen können, welche Bedingnisse vorausgesetzt werden, oder welche praktische Regeln hierin anzuwenden sind, um mit den Zahlzeichen von 2. bis 9., oder wo denselben eine Null angehängt ist, die Bruchzahlen kleiner zu machen?

Antw. a. Mit der Ziffer 2. lassen sich alle Zahlen abkürzen, die am Ende eine gerade Ziffer haben.

b. Mit der Ziffer 3. jene Zahlen, deren Ziffern=Summe am Ende ohne Rest theilbar ist.

c. Mit der Ziffer 4. diejenige Zahlen, bey denen sich die letzten zwey Ziffern ohne Rest theilen lassen.

d. Mit der Ziffer 5. alle jene Zahlen, welche am Ende 5. oder eine Null besitzen.

e. Mit der Ziffer 6. lassen sich diejenigen Zahlen abkürzen, welche mit 2. oder 3. ohne Rest getheilt werden können.

f. Mit der Ziffer 7. findet die Abkürzung nur bey dergleichen Zahlen statt, bey welchen man wahrnehmen kann, daß die letzten zwey Ziffern, durch eine in Gedanken angestellte Probe keinen Rest zurücklassen.

g. Mit der Ziffer 8. sind alle Zahlen abzukürzen, wenn die letzten drey Ziffern sich durch 8. aufheben.

h. Mit der Ziffer 9. sind alle Zahlen abzukürzen, deren Ziffern-Summe ohne Rest theilbar ist.

i. Mit der Zahl 10. hingegen können nur solche Zahlen abgekürzt werden, bey welchen am Ende eine Null vorkommt.

Beweise hievon:

ad a. $\frac{322}{790} \overset{2}{=} \frac{161}{395}$ ad b. $\frac{321}{687} \overset{3}{=} \frac{107}{229}$ ad c. $\frac{256}{1252} \overset{4}{=} \frac{64}{313}$

ad d. $\frac{415}{790} \overset{5}{=} \frac{83}{158}$ ad e. $\frac{2142}{4878} \overset{6}{=} \frac{357}{813}$ ad f. $\frac{1645}{6909} \overset{7}{=} \frac{235}{987}$

ad g. $\frac{5432}{24136} \overset{8}{=} \frac{679}{3017}$ ad h. $\frac{6867}{45918} \overset{9}{=} \frac{763}{5102}$ ad i. $\frac{723(0}{2964(0}$

ad c. Die Multiplikation betreffend.

105te Frage. Was ist zu Ausübung bey vorkommenden Multiplikationen mit Bruchzahlen am Ersten zu wissen nothwendig?

Antw. Daß man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner, wie schon früher erklärt wurde, multipliziren müsse. Z. B. Es sollen $\frac{7}{8}$ fl. durch $\frac{3}{8}$ fl. multiplizirt werden.

Berechnung.

$$\frac{7}{8}\text{ fl.} \times \frac{3}{8}\text{ fl.} = \frac{21}{64}\text{ fl.}$$

Erläuterung.

Hier mußte gesagt werden:

3 mal 7 ist gleich 21. und so

8 × 8. „ = 64.

Auflösung des Guldenbruchs $\frac{21}{64}$.

```
       21
       60
64 : |1260| 19 kr.
     |-624| × 4.
       4
     |176| 2¾ pf.
     |-48| 16
       64  = ¾.
```

Probe:

```
⅞ fl. geben 52½ kr.
⅜  »    »   22½  »
           104
          104
            26¼
            11
6(0 : |118(1¼| 19 kr. 2¾ pf.
        54
      |16(5| 2¾ pf.
      |- 4 | 15
        60  = ¾.
```

Diese Auflösungs-Resultate geben jene Berechnung auf die gemachte Antwort der 102ten Frage an die Hand.

106te **Frage.** Wie kommt es denn, daß das Produkt dieser Multiplikation kleiner ausgefallen ist, als der Multiplikand, und selbst als der Multiplikator?

Antw. Weil Multipliziren heißt: einen Faktor so oft nehmen, als der andere Einheiten hat. Nachdem aber bey ächten Brüchen der Faktor, nemlich der Zähler des Bruchs, nie eine ganze Einheit in sich begreift, sondern nur einige mehr oder wenigere gleiche Theile vom Ganzen; so kann das Gebrochene nur wieder in gebrochenen Zahlen erscheinen, daher das Produkt jedesmal kleiner ausfallen muß, und das um so mehr deswegen, weil die Multiplikation der Nenner immer so viel abwirft, als würde man mit einem Ganzen dieselbe verrichtet haben. Z. B.

$\frac{1}{2}$ mal $\frac{1}{2}$ ist gleich $\frac{1}{4}$,
$\frac{1}{2}$ » $\frac{3}{4}$ = $\frac{3}{8}$, mag man darunter ein Ganzes verstehen, was man für eines will; es seyen z. B. Gulden, Zentner oder Pfund ꝛc. gemeint.

Auch mit allen jenen Brüchen, ob sie gleiche oder ungleiche Nenner haben, hat es die nemliche Beschaffenheit, und findet immer dasselbe Verhältniß dabey statt. Z. B.

Multiplikand.		Multiplikator.		Produkt.
a.		b.		c.
$\frac{4}{5}$ Ztr.	×	$\frac{3}{7}$ Ztr.	=	$\frac{12}{35}$ Ztr.

Auflösung in Pfund. | **Seitenberechnung.**

ad a. 5 : | 400 | 80 ℔.

ad b. 7 : | 300 / −26 / 7 | $42\frac{6}{7}$ ℔.

ad c. 35 : | 1200 / −150 / −1 / 35 | $34\frac{2}{7}$ ℔. $\frac{5}{35} = \frac{2}{7}$.

ad a. 80.
ad b. $42\frac{6}{7}$ ×
3360
$68\frac{4}{7}$
1(00 : | 34(28 $\frac{4}{7}$ | 2(00 / 7(00

7 : | 480 / −64 / 7 | 68

Aus 80. mußten $\frac{6}{7}$ ausgehoben werden mit $68\frac{4}{7}$.

Probe: $34\frac{2}{7}$ ℔. ad c.

Erläuterung.

ad a. wurden $\frac{4}{5}$ Zentner zu 80 Pfund aufgelöst, und sofort dem Zähler 4. von der Auflösezahl 100. nur zwey Nullen angehängt; dann mit dem Nenner 5. in 400. dividirt.

Die Multiplikation der Zentnerbrüche selbst mit $\frac{4}{5}$ und $\frac{3}{7}$ hat ein Produkt von $\frac{12}{35}$ Ztr. zur Folge gehabt, welche aufgelöst $34\frac{2}{7}$ ℔. gaben.

Nun wurden ad a. . . . . 80 ℔.
mit denen ad b. treffenden . . . . $42\frac{6}{7}$ ℔.
multiplizirt, und es kamen durch die Division mit
100. in $3,428\frac{4}{7}$ ad c. heraus, wie jenseits . . $34\frac{2}{7}$ ℔.
als Probe:

Sobald mit den ganzen Zahlen 80. und 42. die Multiplikation vorüber war, mußten aus der Zahl 80. die Theile mit $\frac{6}{7}$ ausgehoben werden. Man sehe die Seitenberechnung, bey welcher mit 6. in 80. multiplizirt und in das Produkt 480. mit 7. dividirt worden ist, wovon ein Resullat mit $68\frac{4}{7}$ sich darstellte, und unter 3,360 gesetzt werden mußte; dann zusammenaddirt eine Zahl von $3,428\frac{4}{7}$ herauskam, von welcher gegen den Divisor 100. die letzten Ziffern mit $28\frac{4}{7}$ abgeschnitten wurden, daher die gesuchten 34 Ztr. schon erfolgt sind.

Und nun den Rest $28\frac{4}{7}$ mit 7. multiplizirt, den Zähler 4. miteingezogen 200. zum neuen Zähler gab. Dann den Divisor 100. ebenfalls mit dem Nenner 7. vermehrt, 700. zum neuen Nenner herauskamen; sofort oben und unten die zwey Nullen abgeschnitten, die verlangten $\frac{2}{7}$ Ztr. sich produzirten.

107te Frage. Liegt nicht sonst auch noch Etwas in der Multiplikation, wenn man Brüche durch Brüche zu multiplíziren hat?

Antw. Daß man die gegenseitigen Verhältnisse derselben genau kennen lerne, die sie untereinander haben. Z. B. ich multiplizire $\frac{5}{7}$ fl. durch $\frac{4}{9}$ fl., oder auch umgekehrt, $\frac{4}{9}$ fl. $\times \frac{5}{7} = \frac{20}{63}$ fl., so ist das fragliche Verhältniß von der Beschaffenheit, als wenn ich sage: von $\frac{5}{7}$ sind $\frac{4}{9}$ ausgehoben worden, und diese betragen gerade $\frac{20}{63}$.

108te Frage. Noch begreife ich die hierauf bezügliche Antwort nicht recht. Ließe sich denn dieser Gegenstand nicht auch auf eine andere Art begreiflicher darstellen?

Antw. Warum denn nicht, und wird solches folgendermassen geschehen:

$$\frac{5}{7}\text{ fl.} \times \frac{4}{9}\text{ fl.} = \frac{20}{63}\text{ fl.}$$

Auflösung.

ad a.	ad b.	ad c.
5	4	20
60	60	60
7 : | 300 | $42\frac{6}{7}$ kr.	9 : | 240 | $26\frac{2}{3}$ kr.	63 : | 1200 | $19\frac{1}{21}$ kr.
26	66 ($\frac{3}{9} = \frac{2}{3}$)	573 ($\frac{3}{63} = \frac{1}{21}$)
7	9	63

109te Frage. Was ich aus dieser gemachten Auflösung der Guldenbrüche in Kreutzer verstehe, vermuthe ich, wird darin liegen: daß $19\frac{1}{21}$ kr. aus $\frac{5}{7}$ fl. so viel, als $\frac{4}{9}$ Theile, oder aus $\frac{4}{9}$ fl. so viel, als $\frac{5}{7}$ Theile seyen, nicht wahr?

Antw. Errathen. Z. B.

ad a. $\frac{5}{7}$: Theile aus $26\frac{2}{3}$ kr. $\times \frac{5}{7}$

| $\frac{10}{3}$ | 3.
| 133 $\frac{1}{*3}$ | $19\frac{1}{21}$ kr.
6

Die Division mit 7 in $*\frac{1}{3}$ konnte nur dadurch verrichtet werden: daß der Nenner 3. mit dem Divisor 7. multiplizirt werden mußte, weil an der ganzen Zahl 133. kein Rest verblieben ist, und das Resultat hievon war $\frac{1}{21}$ kr.

ad b. $\frac{4}{9}$: Theile aus $42\frac{6}{7}$ kr. $\times \frac{4}{9}$

$$\begin{array}{r|l} \frac{24}{7} & 3. \\ 171\frac{3}{7} \quad 8 & 19\frac{3}{63} = \frac{1}{21} \text{ kr.} \end{array}$$

Zu diesem Rest mit $\frac{3}{7}$ gehört vorige Belehrung, weil 7. mit 9. multiplizirt wurde, und $\frac{3}{63}$ abgekürzt aber durch 3. den nemlichen $\frac{1}{21}$ kr. Bruch gab.

110te Frage. Wenn mir nun $\frac{20}{63}$ fl. in Kreutzer aufgelöst $19\frac{1}{21}$ kr. geben, nnd ich weiß ferner, daß, wenn ich 20. von 63. abziehe, mir 43. zum Rest bleiben? — Und löse sofort $\frac{43}{63}$ fl. auch auf, muß mir nicht so viel herauskommen, als mir über Abzug $19\frac{1}{21}$ kr. von 60. überbleibt? —

$$\begin{array}{lrl} \text{Z. B.} & 60\,\frac{21}{-} & \text{kr.} \\ & 19\,\frac{1}{21} & \text{»} \\ \hline \text{nemlich:} = & 40\,\frac{20}{21} & \text{kr.} \end{array}$$

Antw. Ganz richtig. Um aber den Beweis hierüber gründlich abgeben zu können, ist erforderlich: daß man 43. mit 60. multiplizire, und mit 63. in das hiedurch herauskommende Produkt dividire, dann kann aber auch nicht im Geringsten Etwas davon abgehen, wenn man diese beyden Theile, wie folgt, zusammenaddirt.

$$\begin{array}{r} 43 \\ 60 \\ \hline \end{array}$$

$$63: \left|\begin{array}{r} 2580 \\ 6 \\ \hline 63 \end{array}\right| \; 40\frac{20}{21} \text{ kr.} \quad \frac{3}{}\;= \frac{20}{21}. \qquad \begin{array}{r} 40\frac{20}{21} \\ 19\frac{1}{21} \\ \hline 60\frac{21}{21} \end{array} \text{ ist ein Ganzes,}$$

und mit 1. zu den Ganzen einzurechnen.

Bemerkung.

Eine solche Ueberzeugung ist die untrüglichste, wenn man seiner Sache recht gewiß seyn will; so darf man nur den noch abgehenden Rest ebenfalls der Auflösung unterwerfen, und es wird jedesmal, (vorausgesetzt, daß Richtigkeit obwaltet,) dem Verlangen entsprochen; daher noch ein Beyspiel dieser Art:

$\frac{73}{95}$ Ztr geben aufgelöst 95 : | 7300 | 76 $\frac{16}{19}$ ℔.
| 050
8
95 = $\frac{16}{19}$

$\frac{22}{95}$ = = = 95 : | 2200 | 23 $\frac{3}{19}$ =
| 305
1
95 = $\frac{3}{19}$

$\frac{95}{95}$ ein Ganzes.

Zusammen 100 $\frac{19}{19}$ ℔.

111te Frage. Wie kommt es denn,

a. daß $\frac{63}{63}$ fl. und

b. $\frac{95}{95}$ Ztr. mir

ad a. 1 fl. d. i. 60 kr. und

ad b. 1 Ztr. = = 100 ℔.

geben? — Hierüber möchte ich gerne einen nähern Aufschluß haben, weil mir daran gelegen ist, den Grund hievon recht kennen zu lernen. Worin liegt derselbe?

Antw. In dem Nenner selbst; indem der Zähler hiebey das Nemliche ausspricht. Z. B. Ich nehme an:

$\frac{14}{23}$ und $\frac{9}{23}$ geben mir $\frac{23}{23}$, folglich ein Ganzes.

Berechnung.

a. a.
14
60
23 : | 840 | 36 $\frac{12}{23}$ kr.
152
1
23

9
60
23 : | 540 | 23 $\frac{11}{23}$ kr.
81
1
23

60 $\frac{23}{23}$ = 1.

ad b.
14
100
23 : | 1400 | 60 $\frac{20}{23}$ ℔.
2
23

9
100
23 : | 900 | 39 $\frac{3}{23}$ ℔.
213
23

100 $\frac{23}{23}$ = 1.

Erläuterung.

Diese Wiederholung auf die Antwort der 110ten Frage wolle deswegen nicht für überflüßig gehalten werden, weil ich hiedurch

nur recht deutlich zu erkennen geben möchte: der Nenner eines jeden vorkommenden Bruchs zeige mir immer das Ganze einer Sache an. Wo hingegen der abstammende Zähler von diesem besagten Ganzen mir nur die mehr oder weniger treffenden gleichen Theile desselben Ganzen ausspricht.

Die Auflösezahlen 60 kr. von 1 fl. oder 100 ℔. von 1 Ztr. sind hier der Gegenstand, von dem die Rede ist; und es ist daher immer gleichviel, ob ich

a. $\frac{11}{11}$ fl. b. $\frac{29}{29}$ Ztr. c. $\frac{36}{36}$ fl. oder d. $\frac{47}{47}$ Ztr.

annehme, ich sehe immer ein Ganzes vor mir liegen.

112te Frage. Wenn es auch dem so ist; so wünschte ich doch noch darüber besonders belehrt zu werden, wie viel z. B.

ad a.	der	11te	Theil von	60 kr.
ad b.	=	29te	= =	100 ℔.
ad c.	=	36te	= =	60 kr. und
ad d.	=	47te	= =	100 ℔.

seye, und wie dieses aufgefunden werden könne?

Antw. Durch die Division in die Auflösezahlen 60. und 100. z. B.

	Division	Quotient	Probe.
ad a. 11 :	60 / −5 / 11	$5\frac{5}{11}$ kr.	5 mal 11 ist gleich 55. u. 5. ist 60.
= b. 29 :	100 / −13 / 29	$3\frac{13}{29}$ ℔.	3 × 29 = 87. u. 13. ist 100.
= c. 36 :	60 / 24 / 36	$1\frac{24}{36}$ kr. $= \frac{2}{3}$. (12)	1 × 36 = 36. u. 24. ist 60.
= d. 47 :	100 / −6 / 47	$2\frac{6}{47}$ ℔.	2 × 47 = 94. u. 6. ist 100.

Erläuterung.

Durch diese vorgenommene Auflösung zeigt sich nun, daß

ad a. zum 11ten Theil $5\frac{5}{11}$ kr.
" b. " 29ten " $3\frac{13}{29}$ ℔.
" c. " 36ten " $1\frac{24}{36}$ kr. und
" d. " 47ten " $2\frac{6}{47}$ ℔.
die Resultate der Division waren.

Uebrigens war die Probe hierüber sehr einfach, aber nothwendig in einem solchen Falle, um überzeugt zu seyn, was ich nicht oft genug wiederholen kann.

Es durfte bey derselben jedesmal nur die ganze Zahl des Quotienten mit dem Nenner des Bruchs multiplizirt, und der Zähler hievon miteingerechnet werden; so mußte entweder die Zahl 60. oder 100. herauskommen.

113te Frage. Es sollen aber mehrere Brüche zu multipliziren vorkommen, wie hat man sich hierin zu benehmen?

Antw. Von den ersten zwey Bruchzahlen wird Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner vervielfältiget; dann immer mit dem nachfolgenden Bruch die herausgekommenen Zähler und Nenner ebenfalls multiplizirt; am Ende aber, wo es thunlich ist, zum Behuf der Verkleinerung, in Zähler und Nenner dividirt. Z. B.

a.	b.	c.	d.	e.	f.	ad a.u.b.	ad c.	ad d.	ad e.	ad f.	
Ztr.	Ztr.	Ztr.	Ztr.	Ztr.	Ztr.	Ztr.	Ztr.	Ztr.	Ztr.	Ztr.	Ztr.

$$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{1}{6}=\frac{8}{15}=\frac{24}{105}=\frac{48}{945}=\frac{24(0}{756(0}=\frac{24(0^{24}}{4536(0_{211\,2}}=\frac{1}{189}$$

Zu Pfund aufgelöst trift es:

80	$66\frac{2}{3}$	$42\frac{6}{7}$	$22\frac{2}{9}$	$62\frac{1}{2}$	$16\frac{2}{3}$	$53\frac{1}{3}$	$22\frac{6}{7}$	$5\frac{5}{63}$	$3\frac{11}{63}$	Abgekurzt.	$\frac{100}{189}$

Die abgehenden Reste von 100 ℔. sind:

20	$33\frac{1}{3}$	$57\frac{1}{7}$	$77\frac{7}{9}$	$37\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$46\frac{2}{3}$	$77\frac{1}{7}$	$94\frac{58}{63}$	$96\frac{52}{63}$	$99\ \frac{89}{189}$

Und in Zentner-Brüche die Reste.

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{81}{105}$	$\frac{897}{945}$	$\frac{732}{756}$	$\frac{188}{189}$

Von diesen bereits angezeigten Auflösungen der Zentnerbrüche zu Pfund, mit Vergleichung ihrer Reste, sollen nur die letzten vier Abtheilungen der Probe unterworfen werden. Z. B.

Berechnung.

Abtheilung.

1te

$\frac{24}{105} \times :$ Ztr. 105 : | 2400 | 22 $\frac{6}{7}$ Pf.
−300
9
105 $= \frac{15}{}$ $= \frac{6}{7}$

$\frac{81}{105} \times :$ = 105 : | 8100 | 77 $\frac{1}{7}$ =
−755
1
105 $= \frac{15}{}$ $= \frac{1}{7}$

= 100 Pf.

2te

$\frac{48}{945} \times :$ = 945 : | 4800 | 5 $\frac{5}{63}$ =
−−75
945
4 $= \frac{15}{}$ $= \frac{5}{63}$

$\frac{897}{945} \times :$ = 945 : | 89700 | 94 $\frac{58}{63}$ =
−4650
87
945
4 $= \frac{15}{}$ $= \frac{58}{63}$

= 100 Pf.

3te

$\frac{24}{756} \times :$ = 756 : | 2400 | 3 $\frac{11}{63}$ =
−132
756
3 $= \frac{12}{}$ $= \frac{11}{63}$

$\frac{732}{756} \times :$ = 756 : | 73200 | 96 $\frac{52}{63}$ =
−5164
−62
756
3 $= \frac{12}{}$ $= \frac{52}{63}$

= 100 Pf.

4te

$\frac{1}{189} \times :$ = ... — $\frac{100}{189}$ =

$\frac{188}{189} \times :$ = 189 : | 18800 | 99 $\frac{89}{189}$ =
−1799
8
189

= 100 Pf.

Bemerkung.

Ich glaube, diese sehr seltene Probe dürfte bey der Jugend Eindruck machen, und sie dahin verleiten, auch bey Berechnung anderer Exempel dieselbe auf mehrerlei Arten zu machen suchen. Denn, eben so etwas muntert den lernbegierigen Schüler rc. erst auf, wenn z. B. ein Exempel nach der gewöhnlichen Art hergestellt wird, und derselbe ist der Meinung, seiner Sache doch nicht recht gewiß zu seyn; — wodurch wird ein solcher Zweifel gehoben, oder, was hilft ihm am vorzüglichsten aus dieser Verlegenheit? — Antwort: die Probe.

Bey jeder dieser vorangehenden vier Abtheilungen, wo ein Pfundbruch zurückblieb, wird man die Zahl zu deren Abkürzung in der Mitte angesetzt finden.

114te Frage. Ich muß aufrichtig sagen: daß mir diese bereits angestellte Probe recht wohl gefällt, weil aus derselben die Herstellung der zweierlei Bruchtheile von $\frac{24}{105}$ und $\frac{81}{105}$ Zentner rc. die volle Ueberzeugung der vorausgehenden Multiplikationen der Zentner-Brüche, dann deren Auflösung rc. von der 1ten bis zur 4ten Abtheilung hervorgeht, daß nemlich jedesmal das Resultat hievon im Ganzen in 100 ℔. bestanden hat; — indessen möchte ich überdieß auch noch eine ganz entgegengesetzte Probe kennen lernen, die mir von den geschehenen Multiplikationen ein gleiches Produkt, wie oben mit $\frac{1}{189}$ Ztr., aber auf eine viel kürzere Weise lieferte, daher ich zu erfahren wünschte, wie dieses möglich zu machen wäre?

Antw. Wenn man

a. die Nenner obiger Brüche Links untereinandersetzt,

b. die Zähler Rechts in der nemlichen Ordnung eben so vorträgt, dann

c. durch Vergleichung gegenseitig aufhebt, und die Nichts mehr geltenden Zahlen durchstreicht; die Verbliebenen jedoch auf beiden Seiten in sich selbst multiplizirt; so erhält man

d. das Produkt Links zum Nenner, und

e. jenes Produkt Rechts zum Zähler; dadurch aber auch

f. die verlangte Probe rein hergestellt wird. Z. B.

Vergleichung.

ad a. 8.	4.	} 8 Produkt.
= b. 3.	2.	
= c. 7.	3.	
= d. 9.	2.	
= e. 8.	5.	
= f. 6.	1.	
54×7	2.	$= \frac{2}{378} = \frac{1}{189}$ Ztr.
378.	378 / 11	

Belehrung.

Die hier angestellte Vergleichung hat geheißen:

ad a. 5 hebt sich gegen ad e. 5. auf.
= b. 3 = = = = c. 3. =

Nun waren von den Zahlen Rechts der Zähler oben 4. und 2. miteinander zu vervielfältigen, sodann dieses Produkt 8. gegen jene 8. ad e. Links aufzuheben.

Ferner mußten Links die verbliebenen 6. 9. u. 7. miteinander multiplizirt werden, woraus der Nenner 378. entstanden ist, und zum Zähler Rechts 2. verblieben war. Durch 2. abgekürzt, sich richtig $\frac{1}{189}$ Ztr. entzifferten.

115te Frage. Nachdem nun diese sehr pünktlich ausgeführte Probe vollkommen genügt hat, und den Beweis zugleich gab: die Ausübung der hier vorgezeigten Art seye viel anwendbarer, einfacher und sehr kurz; so möchte ich auch gleichwohl die Multiplikation dergleichen verschiedenerlei Bruchzahlen voraus als Exempel, so wie die Probe hierüber nach der obigen Art machen sehen; weil meine Absicht hiezu diese ist: recht auf den Grund zu kommen, damit es mir ja in einem solchen vorkommenden Falle nie mehr fehlen könne. — Wird dieses wohl nach meinem Verlangen zu erzwecken seyn?

Antw. Wenn man die vorausgehende Belehrung genau beobachtet, dann schon. Z. B.

Vergleichung.

a. $\frac{1}{2}$	= 2.	1.	ad a.
b. $\frac{3}{4}$	= 4.	3.	= b,
c. $\frac{7}{8}$	= 8.	7.	= c.
d. $\frac{5}{6}$	= 6.	5.	= d.
e. $\frac{2}{5}$	= 5.	2.	= e.
f. $\frac{6}{7}$	= 7.	6.	= f.
g. $\frac{7}{11}$	= 11.	7.	= g.
h. $\frac{9}{14}$	= 14.	9.	= h.
	2.		
	32×11.		
	352×2.	$\frac{27}{704}$	
	704		

Belehrung.

Bey dieser Abgleichung ist
2 Links ad a. gegen 2 Rechts ad e.
6 = = d. = 6 = = f.
7 = = f. = 7 = = c.
14 = = h. = 7 = = g.
durch diesen Faktor in die Ziffer 2., die unter dem Nenner 14. ad h. steht, aufgelöst worden.

Ferner wurden die Links verbliebenen Nenner, nemlich: 4. 8. 11. und 2., und die Zähler Rechts, mit 3. und 9. miteinander multiplizirt, was einen Bruch von $\frac{27}{704}$ zum endlichen Produkt abgeworfen hat.

Probe.

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{8} \times \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{7}{11} \times \frac{9}{14}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{21}{64} = \frac{105}{384} = \frac{21(0}{192(0} = \frac{126}{1344} = \frac{882}{14784} = \frac{7938}{206976} \Big| \begin{matrix} 27: \\ 704: \end{matrix} \Big| \begin{matrix} 294 \\ 294 \end{matrix}$$

59136

1 ; 250 ; 6611 ; 28

205

$$\frac{7938}{206976} \overset{294}{=} \frac{27}{704}$$

11

Erläuterung.

Aus dem obigen berechneten Exempel selbst, ist durch die vorgenommene Multiplikation ein Produkt von $\frac{27}{704}$ angeziffert worden; wo hingegen bey der darauf gefolgten Probe sich ein viel größeres dergleichen Produkt von $\frac{7938}{206976}$ dargestellt hat.

Das Vorauswissen, daß dieser Bruch jenem mit $\frac{27}{704}$ gleich seyn müsse, gab die Veranlassung dazu: mit der kleinern in die größere Bruchzahl zu dividiren, (wie solches geschehen ist,) und gleichsam Letztere dadurch zu prüfen, ob sie Beide aus einer gleichen Größe bestehen.

Die hieraus erfolgte Zahl bey Zähler und Nenner mit 294. gab nun den klaren Beweis an die Hand, daß eben diese Zahl nicht nur den Zähler und den Nenner abkürzen, sondern $\frac{27}{704}$ gleichstellen werde; daher diese Probe vollkommen entsprochen hat.

Angenommen, es seyen $\frac{27}{704}$ Ztr. gemeint; so giebt diese ganze Multiplikation nicht mehr, als

704 : | 2700 | 3 ℔. 26 Loth. $2\frac{10}{11}$ Quint.
−588 | × 8 } 32.
4704 | × 4
| 18816 | 26 Loth.
−4732 | × 4.
51
| 2048 | $2\frac{10}{11}$ Quint.
−640 | 64
704 = $\frac{10}{11}$.
6

ad d. Die Division betreffend.

116te Frage. Die Division mit ganzen und benamten Zahlen, wo nemlich schon im sechsten Abschnitte die Rede davon war, daß diese Spezies eine der schwierigsten unter den vier bekannten Rechnungsarten seye; — möchte wohl auf den Gedanken führen, um wie viel beschwerlicher solche mit Bruchzahlen vorzunehmen seyn werde?

Antw. Keineswegs, sondern die Division mit Bruchzahlen wird nur dann erschwert werden, wenn man sich die bekannte verkürzte Manier hierin nicht angewöhnen wollte.

Es sollen nun $\frac{7}{8}$ fl. dividirt werden durch $\frac{1}{4}$ fl. und zwar:

Berechnung.

a. Dividend.	b. Divisor.		ad a.		ad b.		c.			Quotient. d.
$\frac{7}{8}$ fl. :	$\frac{1}{4}$ fl.	=	$\frac{7}{8}$	×	$\frac{4}{1}$	=	$\frac{28}{8}$ |	$3\frac{4}{8}$	$\overset{4}{=}$ $\frac{1}{2}$	oder $3\frac{1}{2}$ mal.

Erläuterung.

Der Dividendbruch ist hier
ad a. mit $\frac{7}{8}$ der erste, und der Divisorbruch
= b. mit $\frac{1}{4}$ der zweyte.

Man sieht, daß diese beyden Bruchzahlen, jedoch mit dem Unterschiede noch einmal in Ansatz gekommen sind, daß nemlich
ad a. mit $\frac{7}{8}$, und
= b. = $\frac{4}{1}$, also dieser Bruch umgekehrt anzusetzen war; sodann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizirt wurden, wodurch sich
= c. ein unächter Bruch von $\frac{28}{8}$ zeigte, sofort in den Zähler 28. dividirt, nemlich mit dem Nenner 8., und es kamen zum Quotienten ad c. $3\frac{4}{8}$, oder verkürzt $3\frac{1}{2}$ ad d. heraus. Das will so viel sagen, daß $\frac{1}{4}$ fl. in $\frac{7}{8}$ fl. $3\frac{1}{2}$ mal enthalten seye.

117te Frage. Wie kann ich mich hievon noch besser überzeugen?

Antw. Nicht nur
a. durch die vorzunehmende Probe der Multiplikation, z. B.

ad a.

$$\frac{3\frac{1}{2}}{\frac{7}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8}}\ \text{fl., sondern}$$

b. auch dadurch, wenn ich sage:

ad b.

$$\frac{3\frac{1}{2}}{4^{tel}}$$ ist ebenfalls $\frac{7}{8}$ fl.; denn $\frac{3}{4}$ fl. geben $\frac{6}{8}$ fl., folglich bleibt noch $\frac{1}{2}$ Viertel, oder, was gleichviel ist, $\frac{1}{8}$ über, daher ebenfalls $\frac{7}{8}$ hiedurch ausgezeigt worden sind.

118te Frage. Nun möchte ich aber auch die entgegengesetzte Probe in aufgelösten Kreutzern kennen lernen; wie wird solche zu machen seyn?

Antw. Man nimmt an:

a. $\frac{1}{4}$ fl. gebe . . 15 kr.
b. $\frac{7}{8}$ = geben . . $52\frac{1}{2}$ kr.

dann wird mit ad a. in ad b. dividirt, und es muß sich der nemliche Quotient mit $3\frac{1}{2}$ vorfinden. Z. B.

Berechnung.

ad a. 15 : | $52\frac{1}{2}$ −7 ⏟ 15 | $3\frac{1}{2}$. $= \frac{15}{30} \overset{15}{=} \frac{1}{2}$

Bey dem verbliebenen Rest $\frac{7\frac{1}{2}}{15^{tel}}$ wird gesagt:

2 mal 7 ist 14. und 1 ist 15., dann mit dem Nenner 2. den Divisor 15. multiplizirt, giebt 30., daher $\frac{15}{30}$ mit 15. verkleinert $\frac{1}{2}$ gab. Ferner:

a.	b.		
Ztr.	Ztr.	ad a.	ad b.

$$\frac{6}{7} : \frac{3}{5} = \frac{6}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{30}{21} \Big|\ 1\frac{9}{21} \overset{3}{=} \frac{3}{7}\ \text{oder}\ 1\frac{3}{7}\ \text{mal.}$$

1te Probe.

Multiplikand. $1\frac{3}{7}$ — Multiplikator. — Produkt.

$$\frac{10}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{30}{35} \overset{5}{=} \frac{6}{7}\ \text{Ztr.}$$

Bey der Probe mußten der Quotient, nemlich mit $1\frac{3}{7}$ und der Divisor mit $\frac{3}{5}$ Ztr. in Ansatz gebracht, sodann die beyden Bruchzahlen miteinander multiplizirt werden, und es kam richtig der Dividend mit $\frac{6}{7}$ Ztr. als solche heraus.

2te Probe.

ad a. $\frac{6}{7}$ Ztr. geben $85\frac{5}{7}$ ℔.
" b. $\frac{3}{5}$ " " 6(0 ℔. | 8(5 $\frac{5}{7}$ | $1\frac{3}{7}$ mal, wie oben.
2

6.) $\frac{18(0}{42(0} \Big| \frac{3}{7}$ Der Rest mit $\frac{25\frac{5}{7}\text{ ℔.}}{60}$ gab durch die bekannte Multiplikation einen neuen Bruch von $\frac{180}{420}$, wovon die Nullen gegenseitig abzuschneiden waren, sodann mit 6. darein dividirt werden mußte, und $\frac{3}{7}$ hiedurch herauskam. Weitere

Berechnung in Apotheker-Gewicht.

a. ℔. b. ℔. ad a. ad b.

$$\frac{13}{24} : \frac{2}{9} = \frac{13}{24} \times \frac{9}{2} = \frac{117}{48} \Big|\ 2\frac{21}{48} \overset{3}{=} \frac{7}{16}$$ nemlich $2\frac{7}{16}$ mal.

1te Probe.

$$\frac{2\frac{7}{16}}{\frac{39}{16}} \times \frac{2}{9} = \frac{78}{144} \overset{6}{=} \frac{13}{24}$$ ℔. M. s. den Dividendbruch oben ad a.

2te Probe.

ad a. $\frac{13}{24}$ ℔. geben $6\frac{1}{2}$ Unzen.
" b. $\frac{2}{9}$ " " $2\frac{2}{3}$ "

$\frac{2\frac{2}{3}}{8} \times 2.$ $\frac{6\frac{1}{2}}{13} \times 3.$
16 : | 39 | $2\frac{7}{16}$.
7
16

Hier mußte zuvor jede gemischte Zahl eingerichtet werden, sodann wurden die Nenner der Brüche verwechselt, jedes Produkt, nemlich 8. mit 2. und 13. mit 3. multiplizirt, sofort mit der Zahl 16. in die rechtsstehende Zahl 39. dividirt, wodurch die Probe mit $2\frac{7}{16}$ richtig hergestellt worden ist.

119te Frage. Die Division mit einem Bruch durch einen Bruch zu machen, finde ich nach der vorgezeigten Art nicht mehr so schwer, wie ich mir solche vorgestellt habe; — allein, wenn man z. B. $\frac{201}{467}$ Schäffel durch $\frac{71}{286}$ Schäffel Getreid dividiren sollte, dann die Probe darüber machen wollte, wie wird man sich dabey zu benehmen haben?

Antw. Wie bey Divisionen der einfachsten Art, z. B.

Berechnung.

a.		b.		c.		d.		e.	f.
Schäffel.		Schäffel.				572		24329	
$\frac{201}{467}$	:	$\frac{71}{286}$	=	$\frac{201}{467}$	$\times$	$\frac{286}{71}$	=	$\frac{57486}{33157}$	$1\frac{24329}{33157}$ Schäffel.
				3269					

Erläuterung.

Das Resultat, vielmehr der Quotient bey dieser gemachten Division besteht ad f. in $1\frac{24329}{33157}$ Schäffel. Auch hier mußten ad c. und ad d. Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizirt werden, wie folgt:

Die Zahl 286. war demnach mit 201. zu vervielfältigen, und da die Ziffer 2. in der Hunderterzahl steht, in der Einheit aber ein 1er neben der Null, so durfte gleich mit 2. gesagt werden:

2 mal 6 ist 12. Die Einheit 2. mußte über die Hunderterzahl bey 286. ad d. gesetzt, und so mit der Zehnerzahl 8., dann der Hunderterzahl 2. fortgefahren werden.

Die Multiplikation mit 71. in 467. hingegen mußte um eine Ziffer rückwärts geschehen; dadurch ergab sich der neue Zähler ad e. mit 57486. und der neue Nenner mit 33157.

Durch die Division dieses Nenners in jenen obenstehenden Zähler resultirte sich ein Quotient von $1\frac{24329}{33157}$ Schäffel.

Probe.

a. $1\frac{24329}{33157}$ e.

57486 b. $\times$ c. 71

402402 f. 286

Zähler: 4081506 d.

ad e. 33157 $\times$ 286.

198942
265256
66314

Nenner: 9482902 g.

Bemerkung.

Bey einer solchen Division darf der verbleibende Rest, wie ad e. zu sehen ist, schon oben angesetzt werden.

203 — l. 20306 — k.

h. 4081506
i. 9482902 $= \frac{201}{467}$ Schffl. wie oben ad a.

136054
1421

Erläuterung.

Die gemischte Zahl ad a. war vorher einzurichten, und nachdem 1. nicht vermehrt und nicht vermindert; so durfte von der Bruchzahl, die miteingezogen werden sollte, gleich Zähler und Nenner zusammenaddirt werden, wodurch ad b. die Zahl 57,486. herauskam. In diese mit dem Zähler ad c., nemlich mit 71. multiplizirt, kam der neue Zähler des neuen Bruchs ad d. mit 4.081,506 heraus. Nnn mußten auch die zwey Nenner ad e. und ad f. mit einander multiplizirt werden, und es entzifferten sich hiedurch der neue Nenner mit der Zahl 9.482,902 unter ad g. Nun bestund die neue Bruchzahl ad h. und ad i. in $\frac{4081506}{9482902}$, verkleinert aber kamen ad k. $\frac{201}{467}$ Schäffel nach Verlangen zur Probe heraus.

120te Frage. Bey dieser gemachten Probe, die zwar entsprochen hat, fällt mir nur noch der Umstand auf, wie war der Divisor ad l. aufzufinden?

Antw. Folgendermassen: Weil ich wußte, und der Regel nach voraus zu bestimmen war, daß der so große Bruch dem viel kleinern von $\frac{201}{467}$ gleich seyn mußte; so durfte nur mit diesem Zähler in den Zähler, und mit dem Nenner in den Nenner dividirt werden. Kommt hiedurch die gleiche Zahl heraus, so bin ich in meiner Sache voraus schon gewiß; — fehlt aber nur irgend etwas daran, so liegt der evidente Beweis vor, daß der größere Bruch nicht richtig seye. Z. B.

0612

$$\frac{201}{467} : \frac{4081506}{9482902} = \frac{20306}{20306}$$

1428

Daher diese Zahl unbedenklich als Divisor angenommen werden durfte.

Nun folgen Uebungs-Beyspiele über die

Addition.	Subtraktion.	Multiplikation.	Division.
$\frac{3}{5}$ fl. + $\frac{2}{3}$ fl.	$\frac{4}{5}$ ℔. — $\frac{3}{8}$ ℔.	$\frac{3}{4}$ fl. × $\frac{2}{5}$ fl.	$\frac{7}{8}$ ℔. : $\frac{1}{3}$ ℔.
$\frac{2}{3}$ = + $\frac{4}{9}$ =	$\frac{2}{7}$ = — $\frac{1}{6}$ =	$\frac{7}{8}$ = × $\frac{3}{7}$ =	$\frac{6}{7}$ = : $\frac{2}{5}$ =
$\frac{6}{7}$ Ztr. + $\frac{3}{4}$ Ztr.	$\frac{7}{8}$ fl. — $\frac{2}{5}$ fl.	$\frac{2}{3}$ ℔. × $\frac{4}{9}$ ℔.	$\frac{8}{9}$ fl. : $\frac{3}{7}$ fl.
$\frac{7}{8}$ = + $\frac{5}{16}$ =	$\frac{8}{9}$ = — $\frac{3}{10}$ =	$\frac{7}{11}$ = × $\frac{3}{4}$ =	$\frac{4}{5}$ = : $\frac{3}{8}$ =
$\frac{17}{26}$ ℔. + $\frac{9}{10}$ ℔.	$\frac{13}{24}$ Ztr. — $\frac{2}{7}$ Ztr.	$\frac{6}{13}$ Ztr. × $\frac{1}{3}$ Ztr.	$\frac{3}{4}$ ℔. : $\frac{5}{9}$ ℔.
$\frac{8}{15}$ = + $\frac{7}{18}$ =	$\frac{15}{28}$ = — $\frac{1}{3}$ =	$\frac{7}{19}$ = × $\frac{1}{5}$ =	$\frac{6}{13}$ = : $\frac{1}{4}$ =

Eilfter Abschnitt.

Ueber
die Lehre von Brüchen, gemeinschaftlich durch alle vier Spezies.

121te Frage. Warum wird denn noch ein besonderer Abschnitt über die Bruchlehre gegeben, nachdem kurz vorhin die benannten vier Spezies aus derselben vorgetragen worden sind?

Antw. Um diesen, an sich bedeutenden Gegenstand, nicht nur recht begreiflich zu machen suchen, und die bekannten vier Rechnungsarten in einen Ueberblick zu bringen, sondern damit man auch die gegenseitigen Verhältnisse jeder Art hievon richtig auffassen möge; so wie die verschiedenerlei Brüche eben so zu beurtheilen lerne; denn, es ist damit noch lange nicht gethan, wenn ich auch mit Bruchrechnungen umzugehen, und sie oberflächlich zu behandeln weiß; ich muß bis auf ihr Innerstes hineindringen, muß jeden einzelnen Theil derselben genau kennen lernen, und ihre Zergliederung gehörig vorzunehmen wissen.

Wir wollen es daher versuchen, ob dieser Zweck zu erreichen ist; — denn, eine solche gründliche Kenntniß über die Behandlung der Brüche zu besitzen, ist ein großer Vortheil, ja! — ein wahrer Schatz nicht nur bey allen vorkommenden Berechnungen, sondern vorzüglich bey Ausübung der nachfolgenden Lehrart über die welsche Praktik, welche nach meinem Wissen bis zur Stunde in den mehresten Schulen (wenigstens auf dem Lande) mißkannt geblieben ist; indem in denselben die sogenannte reesische Regel den Vorzug hat.

Es sollen nun z. B. $\frac{5}{7}$ fl. mit $\frac{3}{8}$ fl.

a. addirt,

b. subtrahirt,

c. multiplizirt, und

d. dividirt werden.

Berechnung.

$$\text{ad a. } \overset{\text{f. fl.}}{\frac{5}{\text{a.}7}} + \overset{\text{h. fl.}}{\frac{3}{\text{b.}8}} = \frac{\text{g.}\overset{\text{d. }8}{40} + \text{i.}\overset{\text{e. }7}{21}}{\text{c. }56} = \frac{\text{k. }61}{\text{l. }56} \Big| \overset{\text{m.}}{1\frac{5}{56}} \text{ fl. oder } 1 \text{ fl. } \overset{\text{n.}}{5\frac{5}{14}} \text{ kr.}$$

$$\text{" b. } \frac{5}{7} - \frac{3}{8} = \frac{\overset{8}{40} - \overset{7}{21}}{56} = \frac{19}{56} \text{ fl. oder } 20\frac{5}{14} \text{ kr.}$$

$$\text{" c. } \frac{5}{7} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{56} \text{ fl. oder } 16\frac{1}{14} \text{ kr.}$$

$$\text{" d. } \frac{5}{7} : \frac{3}{8} = \frac{5}{7} \times \frac{8}{3} = \frac{40}{21} \Big| 1\frac{19}{21} \text{ mal ist } \tfrac{3}{8} \text{ in } \tfrac{5}{7} \text{ enthalten.}$$

122te Frage. Aus diesen viererlei Rechnungsarten mit Brüchen habe ich ersehen, daß durch die Addition

ad a. $1\frac{5}{56}$ fl. sich resultirte.

" b. durch die Subtraktion $\frac{19}{56}$ fl.

" c. durch die Multiplikation $\frac{15}{56}$ fl., und daß

" d. durch die Division ausgezeigt wurde, daß $\frac{3}{8}$ in $\frac{5}{7}$ enthalten gewesen seye $1\frac{19}{21}$ mal.

Was kann ich nun hieraus weiter lernen, oder, was lassen sich hierüber für Proben anstellen?

Antw. Bevor ich die geeignete Antwort hierauf ertheilen kann, will ich vorerst noch erläutern: wie bey dem ersten Exempel ad a. verfahren worden ist, und zugleich bemerken: daß die nemliche Verfahrungsart auch bey dem zweyten Exempel ad b. statt gefunden hat.

Der Nenner ad a. mit 7. und der Nenner ad b. mit 8. mußten miteinander multiplizirt werden, um den Generalnenner ad c. mit 56. herauszubringen.

Nun war zu sagen: ad a. 7. in 56 ad c. geht 8 mal ad d. Dann ad b. 8. in 56 ad c. geht 7 mal ad e., und sodann mit dem Zähler 5. ad f. gesagt werden: 5 mal 8 ad d. ist 40 ad g. Ferner mit dem Zähler ad h., nemlich: 3 mal 7 ad e. ist 21. ad i. Jetzt 21. und 40. zusammenaddirt, gab ad k. den Zähler des neuen Bruchs 61 ad k., worunter der Generalnenner ad l. mit 56. zu setzen war.

In diesen unächten Bruch $\frac{61}{56}$ mit dem Nenner hievon dividirt, erhielt man zum Facit ad m. 1 $\frac{5}{56}$ fl. oder ad n. 1 fl. 5 $\frac{5}{14}$ kr.

Die Probe ad a. über dieses Additions-Exempel kann auf zweyerlei Arten durch die Subtraktion gemacht werden, wie folgt:

1te Probe.

ad a. $1\frac{5}{56}$ fl.

$$\frac{61}{56} - \frac{21}{56} = \frac{40}{56} \overset{8}{=} \frac{5}{7} \text{ fl.}$$

2te Probe.

$$\begin{array}{l|l} 1 \text{ fl. } 5\frac{5}{14} \text{ kr.} & 1 = 5. \\ \text{— " } 22\frac{1}{2} \text{ "} & 7 = 7. \\ \hline \text{— " } 42\frac{6}{7} \text{ kr.} & \frac{12}{14} \overset{2}{=} \frac{6}{7} \end{array}$$

Belehrung.

Ueber das gleiche Verhältniß zwischen $42\frac{6}{7}$ kr. und $\frac{5}{7}$ fl.

$$\frac{42\frac{6}{7} \text{ kr.}}{60 \text{ kr.}} \quad \frac{30(0}{42(0} \Big| \overset{6}{} \frac{5}{7} \text{ fl.}$$

Hier durfte nur mit dem Bruchs-Nenner 7. die ganze Kreuzerzahl 42. multiplizirt, und der Zähler 6. miteingezogen werden, so kam der neue Zähler 300. heraus; sodann 60. als die Grundzahl des obigen Bruchs $\frac{42\frac{6}{7}}{60}$ ebenfalls mit 7. vermehrt, zeigte sich der neue Nenner mit 420. Ferner die eine Null Rechts gegenseitig abgeschnitten, mit 6. in diesen neu entstandenen und verbliebenen Bruch $\frac{30}{42}$ dividirt, resultirten sich hieraus die verlangten und erwarteten $\frac{5}{7}$ fl.

Die Probe über das Subtraktions-Exempel ad b. mit dem Rest $\frac{19}{56}$ fl. oder 20 $\frac{5}{14}$ kr. ist durch die Addition zu machen, und zwar:

1te Probe.

$$\text{ad b. } \frac{19}{56} \text{ fl.} + \frac{21}{56} \text{ fl.} = \frac{40}{56} \overset{8}{=} \frac{5}{7} \text{ fl.}$$

2te Probe.

$$\frac{3}{8} \text{ fl.} = 22\frac{1}{2} \text{ kr.} = \frac{7}{14}$$

$$\frac{19}{56} \text{ "} = 20\frac{5}{14} \text{ "}$$

$$42\frac{12}{14} \overset{2}{=} \frac{6}{7} \text{ kr.} = \frac{5}{7} \text{ fl.}$$

Die Probe ad c. über das Multiplikations-Exempel, nemlich mit dem Produkt $\frac{15}{56}$ fl. oder $16\frac{1}{14}$ kr. kann durch die Division gemacht werden.

1te Probe.

$$\text{ad c. } \overset{\text{fl.}}{\frac{15}{56}} : \overset{\text{fl.}}{\frac{3}{8}} = \overset{\text{fl.}}{\frac{15}{56}} \times \frac{8}{3} = \frac{120}{168} \overset{24}{=} \frac{5}{7} \text{ fl.}$$

Wenn eine Probe über ein Multiplikations-Exempel durch die Division gemacht wird; so muß jedesmal die Zahl des Produkts als Dividend angenommen werden.

2te Probe.

$16\frac{1}{14}$ kr.
65
16
225 × 2.
45(0 : $\overset{9}{}$
63 $= \frac{5}{7}$ fl.

$22\frac{1}{2}$ kr.
45 × 14.
180
63(0.

Dieser Divisor mit 63., weil er größer war, als der Dividend 45., durfte nur unter letztern gesetzt, und mit 9. in Zähler und Nenner dividirt werden, kamen ebenfalls $\frac{5}{7}$ fl. heraus.

Die fernere Probe ad d. über das Divisions-Exempel wird durch die Multiplikation verrichtet, und zwar:

ad d. $1\frac{19}{21}$ Probe.

$$\frac{40}{21} \times \frac{3}{8} = \frac{120}{168} \overset{24}{=} \frac{5}{7} \text{ fl.}$$

Bemerkung.

Die Probe nach der 2ten Art zu machen, giebt mir die schönste Gelegenheit dazu an die Hand, vorher die benöthigte Aufklärung hierüber deshalb abzugeben, damit man überzeugt werden möge, auf welche Art $\frac{3}{8}$ in $\frac{5}{7}$ $1\frac{19}{21}$ mal enthalten seyn könne! — Ich weiß, daß mir $\frac{3}{8}$ fl. aufgelöst $22\frac{1}{2}$ kr. geben, folglich habe ich dadurch das Ganze in 1. bekommen. Nun fragt sich's aber, wie viel aus $22\frac{1}{2}$ kr. die $\frac{19}{21}$ Theile ausmachen?

$22\frac{1}{2} \times \frac{19}{21}$
207 : 21

Berechnung.

19
2 | 9.
21 : | 42 $7\frac{1}{2}$ | $20\frac{5}{14}$. Das sind . . . . $20\frac{5}{14}$ kr.

$\frac{15}{42} \overset{3}{=} \frac{5}{14}$ ist so viel als $\frac{5}{7}$ fl. $= 42\frac{12}{14} \overset{2}{=} \frac{6}{7}$ kr.

Nun weiß ich ganz genau, daß $\frac{12}{21}$ Theile aus 22 $\frac{1}{2}$ kr. mir 20 $\frac{5}{14}$ kr. abwerfen.

123te Frage. Jetzt will ich aber den Fall setzen, man wollte z. B. mit $\frac{37}{48}$ Ztr. und $\frac{19}{31}$ Ztr. ebenfalls die Berechnung durch alle vier Spezies damit vornehmen, wird das eben so leicht geschehen können, wie mit den vorigen Exempeln?

Antw. Wenigstens kann eines und dasselbe Verfahren in Anwendung gebracht werden. Z. B.

a. Berechnung durch die Addition.

$$\overset{\text{Ztr.}}{\underset{144}{\overset{111}{\frac{37\,f.}{a.\,48}}}} + \overset{\text{Ztr.}}{\frac{19\,h.}{b.\,31}} = \frac{\overset{d.\ 31}{g.\ 1147} + \overset{e.\ \frac{432}{48} \times 19\ ad\ h.}{912\ i.}}{c.\ 1488.} = \frac{k.\,2059}{l.\,1488} \;\Big|\; \overset{m.}{1\,\frac{571}{1488}}\ \text{Ztr.}$$

571

Erläuterung.

Mit dem Nenner ad a. und mit dem Spezialnenner ad b. mußte zuerst multiplizirt werden, und zwar auf die kürzeste Art, um durch das erfolgte Produkt den Generalnenner ad c. mit 1488. herauszubringen. Dann mit 48. ad a. in denselben dividirt, der Quotient 31. ad d. herauskam. Sodann mit dem Spezialnenner 31. ad b. ebenfalls in ad c. dividirt, sich der Quotient ad e. mit 48. zeigte. Ferner die Zahl 31. von d. und 37. von f. miteinander ebenfalls ganz kurz multiplizirt, das Produkt ad g. mit 1147. und 19. ad h. mit 48. ad e. desgleichen multiplizirt, das Produkt aus 912. ad i. abwarf.

Dann ferner ad i. mit ad g. zusammenaddirt, die Summe ad k. mit 2059. resultirte. Mit dem Nenner ad l., nemlich mit 1488. darein dividirt, einen Quotienten von 1 $\frac{571}{1488}$ Ztr. ad m. entzifferte.

b. Berechnung durch die Subtraktion.

$$\overset{\text{Ztr.}}{\underset{144}{\overset{111}{\frac{37}{48}}}} - \overset{\text{Ztr.}}{\frac{19}{31}} = \frac{\overset{31}{1147} - \overset{\frac{432}{48} \times 19.}{912}}{1488.} = \frac{235}{1488}\ \text{Ztr.}$$

c. Berechnung durch die Multiplikation.

Ztr. 333 Ztr.

$$\frac{37}{48} \times \frac{19}{31} = \frac{703}{1488} \text{ Ztr.}$$

144

d. Berechnung durch die Division.

Ztr. Ztr. 111

$$\frac{37}{48} : \frac{19}{31} = \frac{37}{48} \times \frac{31}{19} = \frac{1147}{912} \Big| \; 1\,\frac{235}{912}\text{tel}$$

432 — 235

124te Frage. Ich bin wirklich recht neugierig, ob hier die nemliche Probe angestellt werden kann, wie kurz vorhin, wo aus $22\frac{1}{2}$ kr. der $\frac{19}{21}$te Theil mit $20\frac{5}{14}$ kr. ausgehoben worden ist, und nachdem $\frac{19}{31}$ Ztr. $61\frac{9}{31}$ Pfund ausmachen, ob, und wie hieraus $\frac{235}{912}$tel Theile gesucht werden können?

Antw. Das kann eben so gut, jedoch mit etwas mehr Mühe in Vollzug gesetzt werden.

Der Berechnung selbst geht aber voraus: ich muß wissen, wie viel mir $\frac{37}{48}$ und $\frac{19}{31}$ Zentner, in Pfund reduzirt, geben. Z. B.

48 :	3700 / 344 / 48	$77\frac{1}{12}$ ℔. / $\frac{4}{48} = \frac{1}{12}$.	31	372 = 31 } 372. / 403
31 :	1900 / 49 / 31	$61\frac{9}{31}$ „	12	108 / 295 / 372

Differenz $15\frac{225}{372}$ ℔.

Diese Differenz mit $15\frac{225}{372}$ ℔. soll und muß jene Zahl seyn, die mit $\frac{235}{912}$ aus $61\frac{9}{31}$ ℔. auszuheben ist, wie nachfolgende Berechnung solches beweisen wird. Z. B.

Berechnung.

```
           fb.  a.    f. 1410
     e. 61  9   ×   235 b. × 61 ad e.
           ---     -----
           31 ad a. :912 h.
     ________________
            257
         c. 2115
   g. 14335  |31|  68 d.
     ad d. 68   7/31 ad d.
ad h. 912: |14403  7/31 | 15 295/372 wie oben.
            5283
              72
           21697                          76
  295 :  i. 22420 | 76               3
  ---              ---    oder     728
  372 :  k. 28272 | 76           22420 | 295
            223                  ----- | ---
                                 28272 | 372
                                   545
                                    1
```

Addition.

```
      11532.
 61  9  | 372 = 3348
    --- |
    31  |        295
 15 295 | 31     885
    --- |
    372 |
 --------   ---------
 77  1      12493 | 1 961
    ---     ----- |   -----
    12      11532 |   11532
```

Abkürzung.

```
  961      961      1
 -----  =        ---
 11532            12
  192
```

Erläuterung.

Durch die Multiplikation mit dem Zähler 9. ad a. in den Zähler 235 ad b. kam eine Zahl mit 2115 ad c. heraus, in diese mit dem darunter gesetzten Nenner 31. von ad a. dividirt, zeigte sich die Zahl 68. ad d. mit einem Rest ad d. von $\frac{7}{31}$. Sodann mit ad e., nemlich mit 61. in 235. ad b. multiplizirt, kam ad f. zu ad g. übergetragen, die Zahl 14,335. heraus; unter diese ad d. nemlich 68. gesetzt, gaben zusammen eine weitere Zahl von $14,403\frac{7}{31}$. In diese mit dem Nenner ad h. dividirt, entzifferten sich 15. und $\frac{723\frac{7}{31}}{912}$ zum Rest.

Durch die Multiplikation mit diesem Nenner 31., und mit Einziehung des Zählers 7. kam heraus ad i. 22,420. zum neuen Zähler; sodann ebenfalls mit 31. die Zahl 912 ad h. multiplizirt, gab den neuen Nenner ad k. mit 28,272. Da nun dieser Bruch dem obigen

mit $\frac{225}{372}$ gleich seyn mußte, wurde mit dieser Bruchzahl in Zähler und Nenner dividirt, welche die Probe mit der gleichen Zahl ausgehalten hat. Man sehe die Antwort nach der 120ten Frage.

Wenn ich nun $61\frac{9}{31}$ und $15\frac{225}{372}$ ℔. zusammenaddire, (man sehe die Addition hierüber, dann die darauf gefolgte Abkürzung des Bruchs $\frac{961}{11532}$, der sich auf $\frac{1}{12}$ reduzirte,) bekomme ich $77\frac{1}{12}$ ℔., wie solche zur Probehaltung verlangt worden sind.

Bemerkung.

Bey Berechnung der obigen Bruch-Exempel wurde auf diese und jene Art die Probe gemacht, zum Beweise, daß es einem Rechner in seiner Willkühr liege, sich die Ueberzeugung von der Richtigkeit der gemachten Rechnung nach eigenem Belieben verschaffen zu können, und derselbe niemals nur an eine Regel gebunden ist, sich an dieselbe halten zu müssen; daher es wirklich unterhaltend seyn muß, wenn in manchen Fällen die Probe auf zwey- und drey-, oder viererlei Arten gemacht werden kann; — und wenigstens nach einer Art gemacht werden soll und gemacht werden muß, um nicht Gefahr zu laufen, es könnte, und sollte es nur durch einen Schreibverstoß geschehen seyn, sich ein Rechnungsfehler eingeschlichen haben.

Dieses Gesagte wird sehr wahrscheinlich durch vorangegangene angestellte Proben sich noch mehr bekräftigen, und ich wünschte nur, daß man selbst dergleichen Proben bey vorkommenden Gelegenheiten vornehmen, und mir in meiner hierin bewiesenen Verfahrungsart beystimmen möchte.

Nun folgen Uebungs-Beyspiele:

$\frac{7}{8}$ fl. + $\frac{1}{4}$ fl.	$\frac{6}{7}$ ℔. + $\frac{3}{8}$ ℔.	$\frac{4}{5}$ Ztr. + $\frac{2}{9}$ Ztr.
$\frac{7}{8}$ = — $\frac{1}{4}$ =	$\frac{6}{7}$ = — $\frac{3}{8}$ =	$\frac{4}{5}$ = — $\frac{2}{9}$ =
$\frac{7}{8}$ = × $\frac{1}{4}$ =	$\frac{6}{7}$ = × $\frac{3}{8}$ =	$\frac{4}{5}$ = × $\frac{2}{9}$ =
$\frac{7}{8}$ = : $\frac{1}{4}$ =	$\frac{6}{7}$ = : $\frac{3}{8}$ =	$\frac{4}{5}$ = : $\frac{2}{9}$ =
$\frac{3}{4}$ Ztr. + $\frac{1}{3}$ Ztr.	$\frac{4}{5}$ fl. + $\frac{3}{17}$ fl.	$\frac{3}{5}$ ℔. + $\frac{4}{19}$ ℔.
$\frac{3}{4}$ = — $\frac{1}{3}$ =	$\frac{4}{5}$ = — $\frac{3}{17}$ =	$\frac{3}{5}$ = — $\frac{4}{19}$ =
$\frac{3}{4}$ = × $\frac{1}{3}$ =	$\frac{4}{5}$ = × $\frac{3}{17}$ =	$\frac{3}{5}$ = × $\frac{4}{19}$ =
$\frac{3}{4}$ = : $\frac{1}{3}$ =	$\frac{4}{5}$ = : $\frac{3}{17}$ =	$\frac{3}{5}$ = : $\frac{4}{19}$ =

125te Frage. Durch die Berechnungen aller der vorgezeigten und nicht nur ausgeführten, sondern auch durch die gemachten Proben über dieselben rein dargestellten Bruch-Exempel habe ich wirklich einen ganz andern Begriff, nemlich: über die bekannten vier Rechnungsarten erhalten, als ich mir denselben voraus denken konnte; weil mir die Verfahrungsart hievon immer sehr dunkel vor Augen lag, und zwar aus dem Grunde: da mir hiezu eine ausführliche Anweisung bisher gefehlt hat.

Indessen bin ich doch nicht ganz zufrieden gestellt; sondern ich wünschte um so mehr noch ferner zu wissen und in Erfahrung zu bringen; — nachdem die verkürzte Divisions-Methode in Ganzen, als eben sowohl mit Bruchzahlen sehr entsprechende Vortheile darbiethet, ob nicht auch durch Hilfe derselben mehrere Theile aus einer ganzen oder gemischten Zahl ausgehoben werden könnten, ohne daß dieselbe Zahl (den Dividendus vorstellend) mehrmalen angesetzt werden müßte?

Antw. Warum denn das nicht! —

126te Frage. Gesagt ist so Etwas bald, aber den Beweis hierüber durch die geeigneten Berechnungen ablegen, ist ganz was Anderes; daher ich mich veranlaßt finde, zu fragen: Kann man mit $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ in die Zahl

a. 3,759,
b. $25,863\frac{4}{7}$, und
c. $371,061\frac{7}{9}$

mit allen den bemerkten Bruchs-Nennern dividiren, und die verlangten Theile im Einzelnen, als eben sowohl zusammengenommen, herausbringen?

Antw. Wenn man nachstehendermassen verfährt, ohne Anstand. Z. B.

Divisions-Berechnung ad a.

$\frac{1}{8}$:	3759	$469\frac{7}{8}$
	5 7 7	
$\frac{1}{4}$:	1 3 3	$939\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}$:	1 1 1 1	$1879\frac{1}{2}$
Thut: $\frac{7}{8}$.		17
		8 | 2.
	Facit:	$3289\frac{1}{8}$.

Probe zu a.

$3759 \times \frac{7}{8:}$

8 : | 26313 | 3289 $\frac{1}{8}$.
| 2771 |
8

Diese Zahl ist aus der vorstehenden $\frac{7}{8}$ Theile.

Wenn man daher noch $\frac{1}{8}$ mit $469\frac{7}{8}$ hinzurechnet, so muß fragliche Zahl mit 3759 zur doppelten Probe herauskommen.

$469\frac{7}{8}$

Wie oben: $3759\frac{8}{8} = x$.

Erläuterung.

Bey einer solchen, vielleicht noch nicht bekannten Division, finden sich die treffenden Reste in gehöriger Ordnung untereinander gesetzt; wobey man vorzüglich nur darauf zu sehen hat: daß die jedesmal nachfolgende neue Zahl, durch Vorrückung einer Ziffer Rechts, im Auge bleibt. Z. B.

Mit dem Divisor 8. war	a. die erste Zahl des Dividends	37.	der Rest 5.
	b. = zweyte neue Zahl =	55.	= = 7.
	c. = dritte = = =	79.	= = 7. d. i. $\frac{7}{8}$.
Mit dem Divisor 4. war	a. die erste Zahl des Dividends	37.	der Rest 1.
	b. = zweyte neue Zahl =	15.	= = 3.
	c. = dritte = = =	39.	= = 3. d. i. $\frac{3}{4}$.
Mit dem Divisor 2. war	a. die erste Zahl des Dividends	3.	der Rest 1.
	b. = zweyte neue Zahl =	17.	= = 1.
	c. = dritte = = =	15.	= = 1.
	d. = vierte = = =	19.	= = 1. d. i. $\frac{1}{2}$.

Bemerkung.

Man beliebe nur selbst in dem Divisions = Exempel nachzusehen, und man wird diese Angaben mit den nacheinander gefolgten Zahlen, so wie die Reste nicht nur eben so richtig finden, sondern auch überdieß die Behandlungsart derselben für keine zu schwere Aufgabe halten.

Divisions = Berechnung ad b.

$\frac{1}{12}$: | 25863 $\frac{4}{5}$ | 2155 $\frac{12}{60}$ = 19.
  1663
$\frac{1}{6}$: -1--3 4310 $\frac{12}{30}$ = 38.
$\frac{1}{4}$: -1223 6465 $\frac{12}{20}$ = 57.
  -1--1
$\frac{1}{2}$: 12931 $\frac{9}{10}$ = 54.

$\frac{12}{12}$ = 1. Probe: 25863 $\frac{4}{5}$.

16(8
6(0 | 2.
$\frac{48}{60}$ $\overset{12}{=}$ $\frac{4}{5}$

Divisions = Berechnung ad c.

$\frac{1}{24}$: | 371061 $\frac{7}{9}$ | 15460 $\frac{126}{216}$ = 196.
  13142
$\frac{1}{12}$: 11 30921 $\frac{88}{108}$ = 176.
$\frac{1}{8}$: -1-229 46382 $\frac{52}{72}$ = 156.
  -53625
$\frac{1}{4}$: -13221 92765 $\frac{16}{36}$ = 96.
  111--1
$\frac{1}{2}$: 185530 $\frac{16}{18}$ = 192.

$\frac{24}{24}$ = 1. Probe: 371061 $\frac{7}{9}$.

816
216 | 3.
$\frac{168}{216}$ $\overset{24}{=}$ $\frac{7}{9}$

Bemerkung.

Bey den Divisions = Exempeln ad b. und ad c. mußten die sich am Ende gezeigten Bruchzahlen, wie bekannt, unter eine gleiche Benennung gebracht werden; wovon die erstern 60. und die letztern 216. zum General = Nenner hatten. Zugleich ist auch durch die Zusammenaddirung der Quotienten bey diesen zwey Abtheilungen die Probe hergestellt worden.

Wenn ein Versuch selbst mit dieser Verfahrungsart gemacht werden wird, so bin ich überzeugt, daß ich Beifall finden werde.

Zwölfter Abschnitt.

Ueber die Lehre

a. von den Verhältnissen, und

b. = = Progressionen,

als Vorbereitung zu der nachfolgenden welschen Praktik.

---

ad a. Von den Verhältnissen.

127te Frage. Oefters war schon die Rede von den Verhältnissen, wenn gleichwohl bisher keine Aufklärung hierüber erfolgte.

In dem Sinne dieses Wortes scheint aber etwas von Bedeutung zu liegen, das mir vielleicht über so manchen bisher gehegten Zweifel Aufschluß ertheilen könnte; wenn meine Frage, die ich hiemit deswegen stelle, gehörig beantwortet werden würde:

Was ist demnach eigentlich ein Verhältniß, oder — was wird darunter verstanden?

Antw. Unter einem Verhältniß versteht man zweyerlei Größen, die jedoch von einerlei Art seyn müssen; in so ferne man mit benamten Zahlen eine gegenseitige Vergleichung anstellen will.

Ich kann z. B.

a. 2 fl. mit 8 fl. — oder

b. 6 Ib. mit 18 Ib. in Vergleichung ziehen, und mich zu überzeugen suchen,

ad a. um wie viel 2. gegen 8. kleiner ist, oder

ad b. wie oftmal 6. in 18. enthalten seye.

Die erste dieser bezeichneten Arten nennt man arithmetisch, und die zweyte derselben geometrisch, weil einmal abgezogen, und das anderemal getheilt wird.

Das arithmetische Verhältniß wird mit einem Querstrich, (—) das geometrische Verhältniß hingegen durch zwey Punkte (:) ausgedrückt; — indem bey dem Erstern die Größe durch die Subtraktion (Abziehung), und bey dem Letztern durch die Division (Theilung) d. h. die Vergleichung geschieht.

Zu einem Verhältniß werden, wie oben bereits gesagt worden ist, zwey Zahlen erfodert, wovon die erste das vordere, und die zweyte das hintere Glied vorstellt. Z. B.

4. -- 8. arithmetisch.
7. : 21. geometrisch.

Hier sind 4. und 7. die Vorderglieder, 8. und 21. aber die hintern Glieder, nemlich:

4. — 8. = 4.
7. : 21. = 3.

Es kann auch ferner ein jedes Verhältniß

a. wachsend, oder
b. abnehmend seyn.

ad a. Die Eigenschaft eines wachsenden arithmetischen Verhältnisses ist, daß das hintere Glied Rechts, dem ersten Glied Links gleich seye, wenn man die Differenz dazu addirt. Z. B. Das vordere Glied bestehe aus 4., die Differenz aus 3., so heißt das Verhältniß, wenn es wächst,

4. und 3. ist 7. Oder:
4. + 3. = 7.

Man darf daher in dem wachsenden arithmetischen Verhältnisse nur die Differenz mit dem vordern Glied addiren, um das hintere Glied zu bekommen.

ad b. Die Eigenschaft eines abnehmenden arithmetischen Verhältnisses hingegen besteht darin: daß das hintere Glied gleich dem vordern Glied, weniger der Differenz ist. Z. B.

6. seye das vordere Glied, und
2. die Differenz; so wird dieses Verhältniß seyn:
6. weniger 4. bleibt 2.

Bey einem abnehmenden arithmetischen Verhältnisse darf man also nur die Differenz von dem Vorderglied in Abzug bringen, so wird 2. oder 4. herauskommen, dann heißt es:

6. verhält sich zu 4., wie sich
4. „ „ 2.

ad a. Die Eigenschaft eines jeden geometrischen wachsenden Verhältnisses ist:

Daß das hintere Glied gleich ist dem Vordergliede, wenn es mit dem Quotienten multiplizirt wird. Z. B.

3. sey das Vorderglied, 8. der Exponent des Verhältnisses, so wird dieses Verhältniß heißen:

3. : 3. × 8. oder 3 : 24.

Das hintere Glied in dem wachsenden geometrischen Verhältniß wird gefunden, wenn man das Vorderglied mit dem Exponenten multiplizirt.

ad b. Die Eigenschaft des geometrischen abnehmenden Verhältnisses hingegen ist:

Daß das hintere Glied gleich ist dem Vordergliede, dividirt durch den Exponenten. Z. B.

6. sey das Vorderglied, 2. der Exponent; so wird das Verhältniß so zu stellen seyn:

6 : $\frac{6}{2}$ oder 6 : 3.

Das hintere Glied aber wird gefunden, wenn das Vorderglied, wie vorhin gesagt, durch den Exponenten dividirt wird.

128te Frage. Durch diese vorangehende Frage, und hierauf ertheilte Antwort, habe ich gleichwohl einigermassen einen kurzen Ueberblick über die Beschaffenheit der arithmetischen und geometrischen Verhältnisse bekommen; — allein, nun fragt es sich vorzüglich darum:

Ist der Werth eines Quints in Heller
zu dem Werthe eines Zentners in Gulden

eben so verhältnißmäßig zu behandeln, d. h. findet hierin auch ein solches Verfahren statt: daß eine Berechnung in dem nemlichen Sinne damit vorgenommen werden kann?

Antw. Wenn aus einem Heller ein Guldenbruch, und aus einem Zentner Quint gemacht werden, dann schon.

129te Frage. Wie läßt sich dieses ausführen?

Antw. Man löst

a. 60 kr. durch 8. zu Heller, und

b. 100 ℔. statt 1 Ztr. durch 128. zu Quint auf, weil 32 Loth durch 4. multiplizirt, auf 1 ℔. so viele Quint abwerfen.

Z. B.

ad a. 60 × 8. = 480 Heller. ad b. 100 × 128. = 12800 Quint.

Nun liegt schon ein gegenseitiges Verhältniß in der Art vor, daß ich sagen kann:

480 verhält sich zu 12,800., wie sich 1 Heller zu 1 Quint verhält; und jetzt darf ich nur aus diesen großen Zahlen eine Bruchzahl machen, in dieselbe mit einer dritten Zahl dividiren, um solche abzukürzen. Z. B.

$$\frac{48(0}{1280(0} = \frac{3}{80}$$

Wie 3. zu 80. ist diesemnach das Verhältniß von 1 Heller zu 1 Quint, auf 1 Ztr. in Gulden.

130te Frage. Mir ist dieses doch noch kein hinlänglicher Beweis, daß gerade das hier ausgezeigte Verhältniß das Rechte seyn müsse. — Giebt es hiezu nicht auch noch eine andere Ueberzeugung, die in Mitte liegt; und worin wird solche aufgesucht und aufgefunden werden können?

Antw. Darin: daß 1 Heller der 480te Theil von 1 fl. ist, mit welchem in 12,800 Quint dividirt werden muß; durch welche Division aber die treffenden Gulden und Kreuzer herauskommen.

Z. B.

$\frac{1}{48(0}$: | 1280(0 | 26 $\frac{2}{3}$ fl. Folglich trifft es auf 1 Zentner:
  322
26 fl. 40 kr.

$\frac{3}{48} = \frac{16}{} = \frac{2}{3}$.

Probe durch die Verhältniß-Zahlen:

$$26\frac{2}{3} \times \frac{3}{80}:$$

8(0 : | 8(0 $\frac{6}{3}$ | 2. | 1 Heller.

131te Frage. Wenn es dem so ist, daß dergleichen Verhältnisse auf eine so einfache Art aus zwey Zahlen bestehen können; so möchte ich fast glauben, die nachfolgenden Rechen-Methoden über die welsche Praktik, Regeldetri und die fast allgemein so sehr beliebte reesische Regel (Kettenpraktik) bestünden aus lauter dergleichen Verhältniß-Zahlen; daher ich die gegenseitigen Verhältnisse aus dieser Ursache

I.

a. von 1 Quint zu $1\frac{1}{4}$ pf. auf 1 Ztr. in Gulden,
b. " 1 Loth " $1\frac{7}{8}$ kr. " 1 " " "
c. " 1 ℔. " $2\frac{1}{2}$ kr. " 1 " " "

Dann ferner II.

d. von 1 Groschen à 3 kr. zu $\frac{1}{4}$ Kronthaler à $40\frac{1}{2}$ kr.
e. " $\frac{1}{2}$ Kronthlr. à 1 fl. 21 kr. zu einem 24 kr. Stück.
f. " 1 Landmünze à $2\frac{1}{2}$ kr. zu 1 Rthlr. à 1 fl. 30 kr.

Und endlich III.

g. von $\frac{1}{2}$ zu $\frac{3}{4}$
h. " $\frac{3}{5}$ " $\frac{6}{7}$ und
i. " $\frac{1}{8}$ " $\frac{4}{9}$

noch näher kennen lernen möchte, um immer mehr zur Ueberzeugung zu gelangen: daß die Lehre über die Wissenschaft der gegenseitigen Verhältnisse eine von den wesentlich Wichtigsten, und deren Kenntniß am nothwendigsten seye; indem sie viel zu einer reiflichen Beurtheilung beytragen dürfte, wenn z. B. Rechnungsfälle vorkommen sollten, die allenfalls dem Rechner selbst noch unbekannt wären.

Wie lassen sich nun diese verlangten verschiedenerlei Verhältnisse ausforschen, oder vielmehr, an was hat man sich hierin zu halten?

Antw. Bey der I. Abtheilung von Lit. a. bis c. an den nachfolgenden Schlüßel zur welschen Praktik über die einfachen ausmessentlichen Theile von einem Gulden 2c., welcher hierüber den besten Aufschluß geben wird. Z. B. Ich frage mich selbst:

Der wievielte Theil von 1 fl. ist

ad a. $1\frac{1}{4}$ pf., dann finde ich in demselben $\frac{1}{192}$ fl.
" b. $1\frac{7}{8}$ kr. " " " " " $\frac{1}{32}$ "
" c. $2\frac{1}{2}$ " " " " " " $\frac{1}{24}$ "

und bilde hieraus Zentnerbrüche. Z. B.

ad a. $\frac{192}{12800} \overset{64}{=} \frac{3}{200}$ ad b. $\frac{32}{3200} \overset{32}{=} \frac{1}{100}$ ad c. $\frac{24}{100} \overset{4}{=} \frac{6}{25}$

Diese heißen abgekürzt:

ad a. $1\frac{1}{4}$ pf. verhält sich zu 1 Ztr. wie 3. zu 200.
" b. $1\frac{7}{8}$ kr. " " " 1 " " 1. " 100.
" c. $2\frac{1}{2}$ " " " " 1 " " 6. " 25.

Bey der II. Abtheilung kann ich sagen:

ad d. 3 kr. und $40\frac{1}{2}$ kr. d. i.

$\frac{3\text{ kr.}}{40\frac{1}{2}\text{ kr.}} \times 2$ oder $\frac{6}{81}$ oder $\overset{3}{\smile}$ $\frac{2}{27}$

Also verhält sich ein Groschen zu $\frac{1}{4}$ Kronenthaler wie sich verhält 2. zu 27. Denn

2 mal $1\frac{1}{2}$ kr. ist 3 kr. oder 1 Groschen, und
27 " $1\frac{1}{2}$ " " $40\frac{1}{2}$ kr. " $\frac{1}{4}$ Kronthaler.

ad e. 1 fl. 21 kr. und 24 kr. × 60.
81

Oder $\frac{81}{24}$ oder $\overset{:3}{\smile}$ $\frac{27}{8}$

Demnach verhält sich $\frac{1}{2}$ Kronthaler zu 24 kr. wie sich verhält 27. zu 8. Denn

27 mal 3 kr. ist 1 fl. 21 kr. und
8 " 3 " " 24 kr.

ad f. $2\frac{1}{2}$ kr. und 1 fl. 30 kr. × 60.
5 90 × 2.
180

Oder $\frac{5}{180}$ oder $\overset{:5}{\smile}$ $\frac{1}{36}$

Es verhält sich hienach $2\frac{1}{2}$ kr. zu 1 fl. 30 kr. wie sich verhält 1. zu 36. Denn

1 mal $2\frac{1}{2}$ kr. ist 1 Landmünze, und
36 " $2\frac{1}{2}$ " " 1 Reichsthaler,

und darin liegt eigentlich der wahre Grund zu einem richtigen Verhältniß, wenn Zähler und Nenner in ihren einzelnen Theilen die gleiche Größe aussprechen.

Bey der III. Abtheilung hingegen kommen die gegenseitigen Verhältnisse von Bruchzahlen nachstehendermassen vor. Z. B.

ad g. $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4} = \frac{\overset{4}{4}\ \ \overset{2}{6}}{8}$ = verhält sich also wie 4 zu 6. oder wie 2 zu 3. $\overset{:2}{}$

„ h. $\frac{3}{5}$ „ $\frac{6}{7} = \frac{\overset{7}{21}\ \ \overset{5}{30}}{35}$ = wie 21 zu 30. oder wie 7 zu 10. $\overset{:3}{}$

„ i. $\frac{1}{8}$ „ $\frac{4}{9} = \frac{\overset{9}{9}\ \ \overset{8}{32}}{72}$ = wie 9. zu 32.

Bemerkung.

Was für überaus große Vortheile eine richtige Kenntniß über die vorkommenden Verhältnisse, ob solche in ganzen oder gebrochenen Zahlen erscheinen, dem Rechner verschaffen, wolle aus der Berechnung des einzigen nachfolgenden Exempels wahrgenommen werden:

Ich kaufe z. B. $\frac{3}{7}$ ℔., was es immer sey, für 21 fl., was werden mich $\frac{5}{7}$ ℔. kosten?

Die Verhältnißzahlen zwischen $\frac{3}{7}$ und $\frac{5}{7}$ kenne ich aus der vorgehenden Darstellung ad h., und nehme also gleich dieselben für die bekannten Größen an; nemlich

$$\frac{7}{1} : \frac{21.}{3} \times \frac{10}{30} \times 3.$$

30 fl. ist mein Facit.

Besondere Bemerkung.

Eine umständlichere Anleitung über mehrere dergleichen Rechnungs-Exempel zu machen, wäre hier nicht am rechten Platz; daher solche erst im II. Theile bey Abhandlung der welschen Praktik ꝛc. in Vortrag gebracht werden kann.

ad b. Von den Progressionen.

132te Frage. Was hat man unter Progressionen zu erkennen, oder vielmehr, was will eigentlich damit gesagt werden?

Antw. Daß eine Reihe von Zahlen, die ab- oder zunehmen,

a. arithmetisch, und

b. geometrisch eingetheilt werden können.

133te Frage. Welche Beschaffenheit hat es
ad a. mit den Zahlen einer arithmetischen Progression?

Antw. Sie wachsen oder nehmen ab in einer gleichen Differenz. Z. B.

1. 2. 3. 4. 5. 6. ꝛc. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. ꝛc.
3. 5. 7. 9. 11. 13. ꝛc. 17. 15. 13. 11. 9. ꝛc.

134te Frage. Auf welche Art läßt sich dieser Gegenstand noch deutlicher durch Beyspiele darstellen, um die eigentliche Verfahrungsweise hierin genauer kennen zu lernen?

Antw. Wenn wir annehmen, es werde unter 37 Personen ein gewisser Geldbetrag mit dem Bemerken ausgetheilt, daß die Erste 1, die Zweyte 2, die Dritte 3 kr. u. s. f. immer um 1 kr. mehr bekommen soll; so kann das endliche Resultat hievon, ohne mühesames Untereinandersetzen folgendermassen sehr kurz berechnet werden. Z. B.

37
1
2 : | 38 | 19 × 37
1 | 1 | 333
1 kr. = 6(0 fl. | 70(3 kr. | oder 11 fl. 43 kr.
14
60

Einem Bothen, der 84 Meilen weit in sehr dringenden Geschäften abgesendet wird, verspricht man für die erste Meile 2 pf. für jede Folgende immer um 2 pf. mehr. Wie viel wird er sich hiemit verdienen?

2 : * 84 Meilen.
1
85 * 42
595 × 7 Facit:
2 pf. = 1/12(0 : fl. | 3 5 7(0 × 6 | 29 fl. 45 kr. ist dessen Verdienst.
1 1 9
12(0

Nun wollen wir aber von 1. bis 1000. jede folgende Zahl um 1 pf. mehr gelten lassen, wie groß wird dieser Betrag ausfallen?

```
                      2 : 1000
                            1
                        ─────────
1 pf  =   1         1001 × 500.     Facit :
        ─────    ──────────────
        24(0 : fl. | 50050(0 pf. | 2,085 fl.  25 kr.
                   | ‾2130       |
                      1
                    ⏟
                    24(0
```

Erläuterung.

Bey einer solchen Berechnung muß immer zu der gegebenen Zahl die erste Zahl 1. hinzuaddirt; sodann die gerade Zahl hievon halbirt, d. h. mit 2. dividirt, und der Quotient mit der ungeraden Zahl multiplizirt werden; welch letzteres Produkt jedesmal die verlangte Größe abwirft.

Und da überhaupt in dem bekannten Zahlen-Systeme jede folgende Zahl um 1. größer wird, so nennt man dieses eine arithmetische Progression.

135te Frage. Und welche Beschaffenheit hat es
ad b. mit den Zahlen einer geometrischen Progression?

Antw. Eine geometrische Progression ist ebenfalls eine Reihe von Zahlen, die zu- oder abnehmen, so zwar: daß immer der nemliche Quotient oder Exponent herauskömmt, wenn die nachfolgende Zahl durch die vorgehende dividirt wird. Z. B.

3. 9. 27. 81. 243. 729. ꝛc. oder 128. 64. 32. 16. 8. 4. 2. ꝛc.

Demnach geht 3 in 9. 3 mal.
9 = 27. 3 =
27 = 81. 3 =
81 = 243. 3 =

So wie 2 in 4. 2 mal
4 = 8. 2 =
8 = 16. 2 =
16 = 32. 2 =
32 = 64. 2 =
64 = 128. 2 =
enthalten ist.

Bey dieser Rechnungsart wird gewöhnlich das Wort Potenz in Anwendung gebracht, was so viel heißt: eine Zahl öfters mit sich selbst multipliziren, und sie dadurch zu einer höhern Potenz erheben.

Wir wollen die Zahl 3. als erste Potenz, oder die Wurzel vielmehr für die Stammgröße der folgenden annehmen. Das Produkt aus ihr selbst,

nemlich	3 mal	3	ist	9.	nennt	man	die	2te	Potenz,
	3	=	9	= 27.	=	=	=	3te	=
	3	=	27	= 81.	=	=	=	4te	=
	3	=	81	= 243.	=	=	=	5te	=

Multiplizirt man aber die 3te und 4te Potenz miteinander, z. B. 27 × 81.

216

2187., so bekömmt man hiedurch die 7te Potenz. Denn es ist gerade so viel, als wenn ich sage: 3. und 4. ist 7.

Hingegen die 3te Potenz mit sich selbst multiplizirt,

27

z. B. 27 × 9

243 × 3

729. erhält man die 6te Potenz.

Wollen wir aber die 12te Potenz haben; so ist die 6te ebenfalls in sich selbst zu multipliziren. Z. B.

729

729 × 9

6561 × 9

59049 × 9

531441. also die 12te Potenz.

136te Frage. Nun setze ich den Fall: Man wollte aus dieser Zahl der 12ten Potenz, nemlich aus 531,441. die 8te, 9te und 10te Potenz erheben, die vor der Hand noch nicht berechnet worden sind. Ließe sich dieses auch herausbringen, und wie?

Antw. Ohne Anstand, und zwar: Wenn man

a. mit der Zahl der 4ten Potenz }
b. „ „ „ „ 3ten „ und } darein dividirt,
c. „ „ „ „ 2ten „ }

so kommen die verlangten Resultate richtig heraus. Z. B.

ad a.	81:	531441 / 4598	6561.	Zahl der 8ten Potenz.
„ b.	27:	4 / 26828	19683.	„ „ 9ten „
„ c.	9:	12 8 / 8	59049.	„ „ 10ten „

Belehrung.

Diese Quotienten der 8ten, 9ten und 10ten Potenz können auch dadurch aufgefunden werden: wenn man

ad a. die Zahl der 4ten Potenz, nemlich 81. in sich selbst multiplizirt,

„ b. die Zahl der 4ten und 5ten Potenz, nemlich 81. und 243. ebenfalls miteinander multiplizirt; dann

„ c. die Zahl der 5ten Potenz, nemlich 243. in sich selbst vervielfältiget.

Welchen Versuch ich jedoch jedem Lernbegierigen selbst überlassen will.

137te Frage. Könnte wohl nicht auch jede andere Zahl von 2. angefangen als 1te Potenz aufgeworfen werden?

Antw. Ja wohl, ob sie größer oder kleiner angenommen wird. Z. B. Man wollte eine Berechnung vornehmen, wo das jährliche Interesse mehrere folgende Jahre zum Kapital geschlagen werden sollte, was eigentlich eine Cento Procento - Berechnung genannt wird; so darf man nur am Ersten

Kapitalstock. mit Einschluß des Prozent zu 5. vom 100.

$5 : \frac{100}{20}$ fl. und $\frac{105}{21}$ fl. mit der Zahl 5. dividiren, dann hat man gleich als 1te Potenz den Quotienten in einer Bruchzahl mit $\frac{21}{20}$ zu erkennen.

Will man ferner von einem Kapital, das aus 500 fl. besteht, von 6 Jahren die Potenz = Erhöhung kennen lernen; so ist der Ansatz hiezu folgendermassen zu machen. Z. B.

20 × 20.
400
8000 × 8000.
64(000000:

21 als 1te Potenz × 21.
42
441 = 2te =
882
9261 = 3te = × 9261.
55566
18522
83349
85766121 = 6te =
500 fl. Kapital.
42883(060500 | $670\frac{3}{64}$ fl. circa 3 kr.
440

Bemerkung.

Ueber diese Rechnungsart wird bey der Abhandlung über die welsche Praktik ein besonderer Abschnitt vorgetragen werden.

Sollte ich gleichwohl bisher so manche Erläuterung oder sonstige Belehrung öfters wiederholt haben; so wird man dieses beobachtete Verfahren aus dem Grunde nicht für überflüßig finden wollen; weil meine Meinung hiezu diese war: nie zu deutlich oder eben so wenig zu verständlich seyn zu können; — auch mancher Gegenstand, um ihn recht erklärbar zu machen, nicht im ersten Augenblick, z. B. bey geringern Exempeln vollkommen ausgeführt werden konnte; daher ich mir auch in meinem nachfolgenden Vortrage, wo es die Nothwendigkeit erforderte, keine Schranken hierin setzte, sondern die einmal angenommene Lehrart eben so verfolgte, und so das vorgesteckte Ziel nach Möglichkeit zu erreichen suchte. — Hiemit wird auch dieser erste Theil beschlossen.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hochbrand, Philipp J.

Handbuch über den fragenden Rechner, welchem jedesmal eine belehrende Antwort, und nöthigen Falls auch die geeignete Erläuterung zum Selbst-Unterrichte gegeben worden ist Oder: Arithmetisches Rechenbuch für alle Stä nde des bürgerlichen Lebens
Bd.: [1]

Augsburg 1829

Math.p. 223 i-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082024-0